Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/08 26.11.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

6. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^p z^n, \quad p \in \mathbb{N}, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7^n+1} z^{3n}$$

Untersuchen Sie außerdem für die Potenzreihen in (b) und (c) für welche z auf dem Rand des Konvergenzkreises die Potenzreihe konvergiert.

(G 2)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Zu je zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x < y$ gibt es eine rationale Zahl q mit $x < q < y$.

(b) Ist $x \in \mathbb{R}$ irrational, so ist auch $q + px$ für alle $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p \neq 0$ irrational.

(c) Zu je zwei Zahlen $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p < q$ gibt es eine irrationale Zahl x mit $p < x < q$.

(d) Die Dirichletsche Sprungfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

(G 3)

Bestimme mittels eines geeigneten Cauchyproduktes eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $\varrho > 0$, so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < \varrho$$

gilt.

Hausübungen

(H 1)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+1}}{(4+(-1)^n)^{3n}}, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) z^n.$$

Untersuchen Sie außerdem für die Potenzreihen in (a) und (c) für welche z auf dem Rand des Konvergenzkreises die Potenzreihe konvergiert.

(H 2)

Zeigen Sie, dass $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit } q > 0 \text{ minimal}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

stetig in allen $x_0 \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ ist.

(H 3)

(a) Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Funktionen auf ihrem Defintionsbereich stetig sind.

$$\text{(i)} \quad f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}, \qquad \text{(ii)} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\sqrt{\exp(3x^2 - 7x) \cdot (x^2+1)}}{x^4 + 3}.$$

(b) In jedem Punkt x der Erdoberfläche bezeichne $T(x)$ die Temperatur, die zu einem bestimmten Zeitpunkt an diesem Ort herrscht und T sei eine stetige Funktion des Ortes x. Als Antipoden von x bezeichnet man den Punkt x_A der Erdoberfläche, der auf der Geraden durch x und den Mittelpunkt der Erde gegenüber von x liegt. Zeigen Sie, dass es einen Punkt x auf der Erdoberfläche mit $T(x) = T(x_A)$ gibt.