Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 19.11.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

5. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen absolut konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4-3n}{5n^4+2}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-5n}{n^3+4}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-4n}{3n^4+5}$.

(G 2)

Welche der folgenden Aussagen implizieren die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Welche der Aussagen impliziert die Konvergenz? Welche sind sogar äquivalent zur Konvergenz?

(a) Die Folge $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

(c) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{N} \quad \left(\left|\displaystyle\sum_{n=n_0}^{n_0+p} a_n\right| < \varepsilon\right)$.

(d) Die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(e) $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

(f) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \exists \varepsilon > 0 \forall n \geq n_0 \quad \left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1-\varepsilon\right)$.

(g) Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $1 > \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 - \dfrac{1}{n}$ für alle $n > n_0$.

(h) Die Folge der Partialsummen $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$, wobei $s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$, ist beschränkt.

(i) Die Folge der Partialsummen $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$, wobei $s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$, ist beschränkt und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(j) Die Folge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$, wobei $b_m := \sum_{n=1}^{m} n a_n$, ist beschränkt.

(G 3)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, so dass jede ihrer Teilfolgen eine konvergente Teilfolge besitzt. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Hausübungen

(H 1)

Welche der folgenden Reihen ist konvergent?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} 2^n}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\beta + \frac{1}{n}\right)^n$, $(\beta \in \mathbb{R})$.

(H 2)

Zu einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen definieren wir die zugehörige *Folge arithmetischer Mittel* durch

$$b_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ gilt.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer divergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass die zugehörige Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(H 3)

(a) Es sei $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ eine absolut konvergente Reihe, so dass $a_j \neq -1$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{1+a_j}$$

absolut konvergiert.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Es sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{|a_j a_{j+1}|}$$

konvergiert. Dann ist $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ absolut konvergent.