Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 12.11.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

4. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2\sqrt{n}}, \qquad \text{(ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihen

$$\text{(i)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\cdot 3^n}{4^{n+2}}, \qquad \text{(ii)}\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k^2-1}.$$

(G 2)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\ a_n + \liminf_{n\to\infty}\ b_n \le \liminf_{n\to\infty}\ (a_n+b_n) &\le \limsup_{n\to\infty}\ (a_n+b_n)\\ &\le \limsup_{n\to\infty}\ a_n + \limsup_{n\to\infty}\ b_n.\end{aligned}$$

(b) Geben Sie zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, für die in (a) überall „$<$“ gilt.

(G 3)

Bestimmen Sie jeweils alle Häufungspunkte der folgenden Folgen:

$$\text{(a)}\ a_n := (-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}},\ n\in\mathbb{N}, \qquad \text{(b)}\ b_n := \mathrm{i}^n,\ n\in\mathbb{N},$$

$$\text{(c)}\ c_n := 2^n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Hausübungen

(H 1)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$ und es gelte $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Unter welchen weiteren Bedingungen gilt dabei sogar „=“ anstelle von „≤“?

(a) Keine weiteren Bedingungen.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind konvergent.

Beweisen Sie in (a), (b) und (c) jeweils ihre Antwort, bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(H 2)

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau einen Häufungspunkt $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und konvergent.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und hat genau einen Häufungspunkt $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und hat genau einen Häufungspunkt.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und hat genau einen Häufungspunkt.

(e) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und hat genau einen Häufungspunkt $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(f) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und beschränkt $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau einen Häufungspunkt.

(H 3)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1-n^2}{n^2(1+n)}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^{n+1})^2}{17 \cdot 2^{3n}}.$$

(b) Berechnen Sie die Reihenwerte der folgenden beiden Reihen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} \right].$$

Bei der ersten Reihe sei $p \in \mathbb{N}$ fix vorgegeben und es darf am Ende eine endliche Summe stehen bleiben.