Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 5.11.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

3. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n}},\ n \in \mathbb{N}, \qquad b_n := \frac{2^n + (-3)^n}{(-2)^n + 3^n},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

$$c_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N}_0, \qquad d_n := \frac{(2n^2 - 3n)(n^3 + 1)}{(n+2)(n^2 + n^4)},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

(G 2)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folgen in $\mathbb{C}$. Entscheiden Sie für die folgenden vier Aussagen jeweils, ob sie allgemein gültig sind. Geben Sie jeweils einen Beweis, bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent, so ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent.

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent.

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent, so ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent.

(d) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent, so ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergent.

(G 3)

(a) Begründen Sie für die folgenden Funktionen, ob diese jeweils injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto 3z, \qquad g : \mathbb{R} \to [0, \infty),\ x \mapsto |x - 1|, \qquad h : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x \mapsto 3x.$$

(b) Es seien X, Y und Z Mengen und $f : X \to Y$, sowie $g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann ist die Verkettung von f und g definiert durch $g \circ f : X \to Z$ mit $g \circ f(x) := g(f(x))$, $x \in X$.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(ii) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

Hausübungen

(H 1)

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } n \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade}, \\ \frac{1}{n^2}, & \text{falls } n \in \mathbb{N}_0 \text{ ungerade}, \end{cases} \qquad b_n := \frac{6n^6 + 9n^5 - n^4 - 7n^3 + n^2 - 5}{2n^6 + n^4 + 3n^2 - 5}, \; n \in \mathbb{N},$$

$$c_n := (-1)^n \sqrt{n+1}\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big), \; n \in \mathbb{N}_0, \qquad d_n := \frac{n^n}{n!}, \; n \in \mathbb{N}.$$

(H 2)

(a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ mit $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Beweisen Sie weiterhin, dass die damit sinnvoll definierte Folge $(c_n)_{n\geq n_0}$ mit $c_n := a_n/b_n$, $n \geq n_0$, ebenfalls konvergiert und dass $\lim_{n\to\infty} c_n = a/b$ gilt.

(b) Laut Vorlesung gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} > 2.$$

Erklären Sie was an der folgenden Argumentation falsch ist und begründen Sie warum man so auf ein falsches Ergebnis kommt:

Es ist $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, *also gilt* $\lim_{n\to\infty} 1 + 1/n = 1$ *und damit schließlich*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 1^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

(H 3) (Arithmetisches und Geometrisches Mittel)

Es seien zwei Zahlen $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < a_0 < b_0$ gegeben. Damit definieren wir rekursiv die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \; n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \; n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie:

(a) $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend.

(c) Beide Folgen sind konvergent.

(d) Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.