Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 29.10.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

2. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Berechnen Sie $(12+5i)(2+3i)$ und $\overline{z}$, $\mathrm{Re} z$, $\mathrm{Im} z$, $\mathrm{Re}\frac{1}{z}$ und $\mathrm{Im}\frac{1}{z}$ von $z := \dfrac{12+5i}{2+3i}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\left|\frac{1+it}{1-it}\right| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die folgenden Punktmengen.

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \le 1\}, \qquad M_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \le |z+1|\}$$

(G 2)

Beweisen Sie Lemma 1.25 der Vorlesung:

Es sei $M \subset \mathbb{R}$ und $-M := \{-m : m \in M\}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) M ist nach unten beschränkt $\Leftrightarrow$ $-M$ ist nach oben beschränkt.

(b) Jede nichtleere nach unten beschränkte Menge M besitzt ein Infimum. Dies ist eindeutig bestimmt und wird mit $\inf M$ bezeichnet.

(c) $M \neq \emptyset$ ist nach unten beschränkt $\Rightarrow$ $\inf M = -\sup(-M)$.

(G 3)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen reeller Zahlen beschränkt sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.

(a) $A := \left\{x + \frac{1}{x} : \frac{1}{2} < x \le 2\right\}$

(b) $B := \{x \in \mathbb{R} :$ Es existiert ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x+2)^2 + 4y^2 < 9\}$

Hausübungen

(H 1)

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichungen:

(a) $\frac{z}{1-i} + \frac{8+i}{i-2} = \frac{1}{2}\overline{z} - 3 - 2i$ (b) $4z + \frac{52}{z} = 24$ mit $z \neq 0$ (c) $z^2 - (3+5i)z - 16 + 4i = 0$

(H 2)

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere, beschränkte Mengen. Beweisen Sie:

(a) $\sup\{a+b : a \in A, b \in B\} = \sup A + \sup B$,

(b) $\sup\{a-b : a \in A, b \in B\} = \sup A - \inf B$,

(H 3)

Es sei $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ eine (endliche oder unendliche) Familie von nichtleeren Mengen $M_\alpha \subset \mathbb{R}$ und $M = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ deren Vereinigung. Ferner sei $m_\alpha = \sup M_\alpha$. Zeigen Sie, dass $\sup M = \sup\{m_\alpha : \alpha \in A\}$ gilt.