Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 22.10.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

1. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Beweisen Sie ausgehend von den Axiomen für $\mathbb{R}$ die folgende Aussage.

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Sind x, y reelle Zahlen mit $a \cdot x = b$ und $a \cdot y = b$, so gilt $x = y$.

(G 2) (Umgekehrte Dreiecksungleichung)

Beweisen Sie: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Big| |x| - |y| \Big| \leq \Big| x - y \Big|.$$

(G 3)

Beweisen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Falls $x < y$, so gilt $x < \frac{x+y}{2} < y$.

(b) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2, \quad$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$

(c) Zu reellen Zahlen x, y mit $x < y$ gibt es eine reelle Zahl z, so dass $x < z < y$ gilt.

(G 4) (Vollständige Induktion)

(a) Gegeben sei ein Schachbrett mit der Seitenlänge 2^n, von dem man ein beliebiges Feld entfernt. Zeigen Sie, dass man das Brett mit „L"-förmigen Kartonstücken überdecken kann. Die Kartonstücke sind dabei so groß, dass sie genau drei Felder bedecken. Die Kartonstücke dürfen sich nicht überlappen.

(b) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl n die Zahl $2^{2n} - 1$ durch 3 teilbar ist.

Hausübungen

(H 1) (Cauchy-Schwarz Ungleichung)

(a) Beweisen Sie die folgende Aussage für alle reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

$$\text{Falls } \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 1 \text{ dann folgt } \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq 1.$$

(b) Beweisen Sie, dass für alle $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ die Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$$

gilt.

(H 2)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $5^n - 1$ ist durch 4 teilbar.

(b) $3^{2^n} - 1$ ist durch 2^{n+2} teilbar.

(c) Die Anzahl A_n aller Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gegeben durch $A_n = 2^n$.

(H 3)

Zeigen Sie

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$