Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/08 08.10.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

OWO-Übung

Gruppenübungen

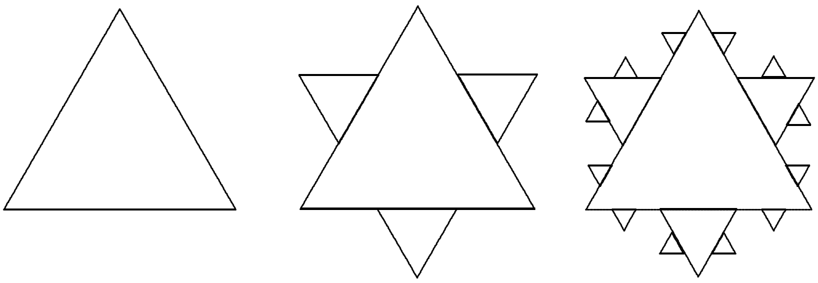
Aufgabe G1

Frau Holle schüttelt ihre Betten aus. Am ersten Tag fallen flache, gleichseitige Dreiecke als Schneeflocken (s.u.). Frau Holle gefällt die Form ihrer Schneeflocken nicht. Am nächsten Tag möchte sie deshalb andere Schneeflocken machen. Sie verbessert diese, indem sie jede Seite der dreieckigen Schneeflocken drittelt und am Mittelstück ein gleichseitiges Dreieck aus Schnee anklebt (s.u.). Frau Holle gefallen diese Flocken auch nicht. Sie wiederholt daher ihre Prozedur am darauffolgenden Tag, das heißt sie teilt jede Begrenzungslinie in drei gleiche Teile und klebt jeweils ein gleichseitiges Dreieck aus Schnee an (12 Stück). Frau Holle gefallen diese Schneeflocken immer noch nicht, deshalb wiederholt sie ihre Verbesserungen immer wieder. Frau Holle hat jeden Tag immer nur die gleiche Menge Schnee zur Verfügung. Sie fragt sich daher ob ihr irgendwann der Schnee ausgeht, wenn sie jeden Tag die Schneeflocken nach obiger Konstruktion verändert. Sie fragt sich also

(a) Konvergiert die Folge der Flächeninhalte?

(b) Konvergiert die Folge der Kantenlängen?
(Zur Kantenlänge zählt nur die Begrenzungslinie der Figur, also nicht die Länge der Anklebestellen.)

Versuchen Sie, Frau Holle bei der Antwort zu helfen. Berechnen Sie hierzu jeweils: die Anzahl der Kanten K_n, die Länge L_n einer Kante, den Umfang U_n und den Flächeninhalt F_n der Schneeflocke am Tag n. Wie verhalten sich diese Zahlen, wenn n gegen ∞ strebt? Überlegen Sie sich, wie Sie den Begriff der Konvergenz definieren würden.



usw.

Hausübungen

Aufgabe H1

Wir konstruieren analog zur Gruppenübung „Schneeflocken“ aus Rechtecken wie folgt:

Das Startrechteck R_1 hat Länge 1 und Breite $\frac{1}{4}$. Dann teilen wir jede lange Seite von R_1 durch 4. Anschließend kleben wir auf die mittleren zwei Viertel der langen Seiten die lange Seite eines Rechtecks mit Länge $\frac{1}{2}$ und Breite $\frac{1}{8}$. Die lange Seite des kleinen Rechtecks, die das große Rechteck nicht berührt nennen wir r_2 bzw. r'_2. Auf die mittleren zwei Viertel der kurzen Seiten kleben wir ebenfalls Rechtecke der Länge $\frac{1}{2}$ und Breite $\frac{1}{8}$. Diesmal kleben wir die Rechtecke mit den kurzen Seiten an. Die den Klebestellen gegenüber liegenden Seiten der kleinen Rechtecke nennen wir r''_2 und r'''_2.

Haben wir das Polygon R_n konstruiert so ergibt sich R_{n+1} durch Anwenden der gleichen Schritte wie oben: Wir teilen also r_n, r'_n, r''_n, r'''_n in 4 gleiche Teile und kleben an die mittleren zwei Viertel dieser Seiten jeweils ein Rechteck der Länge $r_n/2$ und der Breite $r_n/8$.

Berechnen Sie die folgenden Werte für R_n: die Anzahl der Kanten K_n, den Umfang U_n und den Flächeninhalt F_n. Wie verhalten sich K_n, U_n und F_n, wenn n gegen ∞ strebt?