Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Bokowski
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan
Dr. Lars Schewe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008
4. Februar 2008

Semestralklausur „Einführung in die Algebra für M, MCS, LaG“

Name in Druckschrift: ....

Vorname in Druckschrift: ....

Matrikelnummer: ....

Fachrichtung / Prüfungsordnung: ....

Schein erwünscht?: ....

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$	Note
Punktzahl	10	10	10	10	40	
erreichte Punktzahl						

- Bitte bearbeite **nur 3 der 4 Aufgaben** und streiche die Aufgabe auf dem Aufgabenblatt durch, die du auslassen willst. Maximal sind also nur **30 Punkte** zu erreichen.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Bitte alle Blätter mit **Namen** und **Matrikelnummer** versehen und fortlaufend nummerieren.
- Alle Blätter dürfen nur **einseitig** beschrieben werden.
- Bitte jede neue Aufgabe auf einem **neuen** Blatt beginnen.
- Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.
- Alle Ergebnisse/Sätze, die nicht Inhalt der Vorlesung waren, müssen begründet werden!
- Taschenrechner sind nicht zugelassen.
- Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.
- Am Schluss sind alle Blätter in die einmal gefalteten Aufgabenblätter zu legen.
- **Viel Erfolg!**

---

1. Aufgabe (10 Punkte)

Wir betrachten die Symmetriegruppe G eines regulären Tetraeders.

(a) Bestimme alle Drehachsen und Spiegelebenen

(b) Begründe, dass G isomorph zu S_4 ist.

(c) Zeige, dass die Drehgruppe des regulären Tetraeders isomorph zur Gruppe A_4, der Gruppe der geraden Permutationen auf 4 Punkten ist.

2. Aufgabe(Ankreuztest) (10 Punkte)

Mache vor jeder **richtigen** Aussage der folgenden Thesen ein Kreuz. Falsches Ankreuzen **und** falsches Nicht-Ankreuzen werden innerhalb der Aufgabe als **Minuspunkt** gewertet, richtiges Ankreuzen und richtiges Nicht-Ankreuzen als Pluspunkt. Die Gesamtpunktzahl der Aufgabe ist das Maximum von 0 und der Summe der Minus- und Pluspunkte.

◯ Ist jede Untergruppe H einer Gruppe G ein Normalteiler, dann ist G abelsch.

◯ Jede Untergruppe H einer Gruppe G ist der Kern eines Gruppenmorphismus' $\phi : G \to G'$.

◯ Endliche einfache abelsche Gruppen sind immer zyklisch mit Primzahlordnung.

◯ Gruppen mit Primzahlordnung sind immer einfach.

◯ (2 6 4 10 8) ist eine ungerade Permutation.

◯ Sei G Gruppe. Dann ist $\sigma : G \times G \to G, (g, h) \mapsto g^{-1}hg$ Gruppenwirkung.

◯ Sei $\sigma : G \times X \to X$ Wirkung. Fixiert jedes $g \in G$ mehr als ein $x \in X$, dann ist σ nicht transitiv.

◯ Sei G eine Gruppe und $\mathcal{H}$ die Menge aller Untergruppen von G. Dann ist die Wirkung $\sigma : G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $(g, H) \mapsto gHg^{-1}$ transitiv.

◯ Abelsche Gruppen sind nicht immer isomorph zu einem Produkt zyklischer Gruppen.

◯ Sylow-3-Untergruppen einer 54-elementigen Gruppe sind 9-elementig.

◯ Es gibt einen Normalteiler der Ordnung 7 in jeder Gruppe der Ordnung 35.

3. Aufgabe(Isomorphietypen einiger endlicher Gruppen) (10 Punkte)

Isomorphietypen von Gruppen einer Ordnung $n \in \mathbb{N}$ sind Gruppen, so dass jede Gruppe der Ordnung n zu genau einer dieser Gruppen isomorph ist.

(a) Gib (ohne Begründung) Isomorphietypen aller Gruppen der Ordnungen von 1 bis 7 an.

(b) Bestimme Isomorphietypen aller Gruppen der Ordnung 51.

(c) Bestimme Isomorphietypen aller *abelschen* Gruppen der Ordnung 60.

(d) Bestimme Isomorphietypen aller *abelschen* Gruppen der Ordnung 81.

4. Aufgabe(Eine Gruppenwirkung auf $\mathbb{C}$) (10 Punkte)

(a) Zeige, dass folgende Menge Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ ist:

$$G := \mathrm{AGL}(1, \mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

(b) Wir definieren $\sigma : G \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(g, z) \mapsto g.z$ durch $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).z := az + b$. Zeige, dass σ Gruppenwirkung ist. Ist sie transitiv? Wieso kürzt man die Gruppe G mit $\mathrm{AGL}(1, \mathbb{C})$ ab?

(c) Seien $z_1 \neq z_2$ und $w_1 \neq w_2$ in $\mathbb{C}$. Zeige: Es gibt genau ein $g \in G$ mit $g.z_1 = w_1$ und $g.z_2 = w_2$.

(d) Sei $g \in G$. Zeige, dass die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto g.z$ die Abstände in $\mathbb{C}$ um einen festen positiven Faktor streckt. *Hinweis:* Der Abstand zweier Punkte $z, z' \in \mathbb{C}$ ist $|z - z'|$.

(e) Zeige: Unter σ gehen Kreise in Kreise und Geraden in Geraden über.