Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Bokowski
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan
Dr. Lars Schewe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008
4. Februar 2008

Semestralklausur „Einführung in die Algebra für M, MCS, LaG“

Name in Druckschrift: ....

Vorname in Druckschrift: ....

Matrikelnummer: ....

Fachrichtung / Prüfungsordnung: ....

Schein erwünscht?: ....

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$	Note
Punktzahl	10	10	10	10	40	
erreichte Punktzahl						

- Bitte bearbeite **nur 3 der 4 Aufgaben** und streiche die Aufgabe auf dem Aufgabenblatt durch, die du auslassen willst. Maximal sind also nur **30 Punkte** zu erreichen.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Bitte alle Blätter mit **Namen** und **Matrikelnummer** versehen und fortlaufend nummerieren.
- Alle Blätter dürfen nur **einseitig** beschrieben werden.
- Bitte jede neue Aufgabe auf einem **neuen** Blatt beginnen.
- Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.
- Alle Ergebnisse/Sätze, die nicht Inhalt der Vorlesung waren, müssen begründet werden!
- Taschenrechner sind nicht zugelassen.
- Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.
- Am Schluss sind alle Blätter in die einmal gefalteten Aufgabenblätter zu legen.
- **Viel Erfolg!**

1. Aufgabe (10 Punkte)

Wir betrachten die Symmetriegruppe G eines regulären Tetraeders.

(a) Bestimme alle Drehachsen und Spiegelebenen

(b) Begründe, dass G isomorph zu S_4 ist.

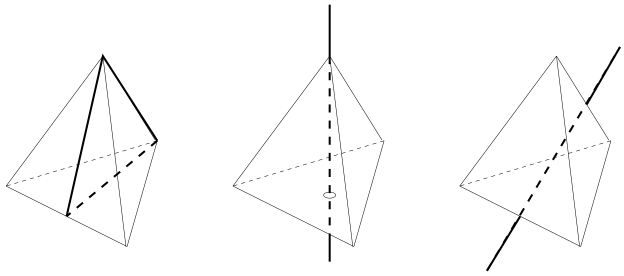
(c) Zeige, dass die Drehgruppe des regulären Tetraeders isomorph zur Gruppe A_4, der Gruppe der geraden Permutationen auf 4 Punkten ist.

Lösung:

(a) Die Symmetrieebenen gehen alle durch den Schwerpunkt und enthalten eine der Kanten, es gibt also sechs verschiedene. Drehachsen gibt es zwei verschiedene Typen:

Typ I: Achsen durch den Schwerpunkt und eine der Ecken, also vier verschiedene. Es gibt jeweils Drehungen um die Winkel $\frac{2\pi}{3}$ und $2 \cdot \frac{2\pi}{3}$, d.h. acht Drehungen dieser Art.

Typ II: Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten, also drei verschiedene, wobei nur die Drehung um π den Körper in sich überführt.



(b) Nummeriert man die Ecken des Tetraeders mit den Zahlen $\{1, 2, 3, 4\}$, so wirkt die Symmetriegruppe des Tetraeders auf dieser Menge durch eine Permutation der Ecken. Wir erhalten also einen Homomorphismus $G \to S_4$. Dieser ist injektiv, weil jede von der Identität verschiedene Symmetrie auch Ecken vertauscht.

Die Spiegelung an der in a) skizzierten Symmetrieebene vertauscht gerade zwei Ecken, entspricht also einer Transposition. Da durch geeigneter Wahl der Ebene zwei beliebige Ecken vertauscht werden können (wähle die Ebene, die auf der verbindenden Kante senkrecht steht), erhält man alle Transpositionen und damit die ganze Gruppe S_4 als Bild von G. Damit ist die Abbildung $G \to S_4$ der gesuchte Isomorphismus.

(c) Die Drehgruppe des Tetraeders besteht aus der Identität, den acht Drehungen vom Typ I und den drei Drehungen vom Typ II, insgesamt also 12 Elementen. Damit entspricht sie unter dem Isomorphismus aus b) einer 12-elementigen Untergruppe von S_4, und das ist A_4. Man kann auch explizit angeben, welche Permutationen der Ecken durch die Drehungen induziert werden:

Typ I: Eine Ecke bleibt fest, die drei anderen werden zyklisch permutiert, also ist die Permutation ein 3-Zyklus $(* * *)$.

Typ II: Je zwei Ecken werden vertauscht, also ist die Permutation von der Form $(**)(**)$ mit zwei elementfremden Transpositionen.

2. Aufgabe(Ankreuztest) (10 Punkte)

Mache vor jeder **richtigen** Aussage der folgenden Thesen ein Kreuz. Falsches Ankreuzen **und** falsches Nicht-Ankreuzen werden innerhalb der Aufgabe als **Minuspunkt** gewertet, richtiges Ankreuzen und richtiges Nicht-Ankreuzen als Pluspunkt. Die Gesamtpunktzahl der Aufgabe ist das Maximum von 0 und der Summe der Minus- und Pluspunkte.

◯ Ist jede Untergruppe H einer Gruppe G ein Normalteiler, dann ist G abelsch.

◯ Jede Untergruppe H einer Gruppe G ist der Kern eines Gruppenmorphismus' $\phi : G \to G'$.

◯ Endliche einfache abelsche Gruppen sind immer zyklisch mit Primzahlordnung.

◯ Gruppen mit Primzahlordnung sind immer einfach.

◯ (2 6 4 10 8) ist eine ungerade Permutation.

◯ Sei G Gruppe. Dann ist $\sigma : G \times G \to G, (g, h) \mapsto g^{-1}hg$ Gruppenwirkung.

◯ Sei $\sigma : G \times X \to X$ Wirkung. Fixiert jedes $g \in G$ mehr als ein $x \in X$, dann ist σ nicht transitiv.

◯ Sei G eine Gruppe und $\mathcal{H}$ die Menge aller Untergruppen von G. Dann ist die Wirkung $\sigma : G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $(g, H) \mapsto gHg^{-1}$ transitiv.

◯ Abelsche Gruppen sind nicht immer isomorph zu einem Produkt zyklischer Gruppen.

◯ Sylow-3-Untergruppen einer 54-elementigen Gruppe sind 9-elementig.

◯ Es gibt einen Normalteiler der Ordnung 7 in jeder Gruppe der Ordnung 35.

Lösung:

◯ Ist jede Untergruppe H einer Gruppe G ein Normalteiler, dann ist G abelsch.

◯ Jede Untergruppe H einer Gruppe G ist der Kern eines Gruppenmorphismus' $\phi : G \to G'$.

⊗ Endliche einfache abelsche Gruppen sind immer zyklisch mit Primzahlordnung.

⊗ Gruppen mit Primzahlordnung sind immer einfach.

◯ (2 6 4 10 8) ist eine ungerade Permutation.

◯ Sei G Gruppe. Dann ist $\sigma : G \times G \to G, (g, h) \mapsto g^{-1}hg$ Gruppenwirkung.

⊗ Sei $\sigma : G \times X \to X$ Wirkung. Fixiert jedes $g \in G$ mehr als ein $x \in X$, dann ist σ nicht transitiv.
Bemerkung: Es hat bei dieser Aussage die Voraussetzung gefehlt, dass G und X endlich sind. In diesem Fall folgt die Aussage nämlich aus dem Satz von Burnside. Im anderen Fall ist die Aussage aber falsch, da zum Beispiel die Wirkung $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ (Drehungen einer Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$) transitiv ist, aber jede Drehung zwei Fixpunkte hat, nämlich die Schnittpunkte der Drehachse mit der Einheitssphäre. (Jedes Element aus $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ hat einen (mindestens) eindimensionalen Eigenraum zum Eigenwert 1, lässt also eine Ursprungsgerade fest.)
Daher wird diese Aussage bei jedem Teilnehmer als richtig beurteilt gewertet.

◯ Sei G eine Gruppe und $\mathcal{H}$ die Menge aller Untergruppen von G. Dann ist die Wirkung $\sigma : G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $(g, H) \mapsto gHg^{-1}$ transitiv.

⊗ Abelsche Gruppen sind nicht immer isomorph zu einem Produkt zyklischer Gruppen.

◯ Sylow-3-Untergruppen einer 54-elementigen Gruppe sind 9-elementig.

⊗ Es gibt einen Normalteiler der Ordnung 7 in jeder Gruppe der Ordnung 35.

3. Aufgabe(Isomorphietypen einiger endlicher Gruppen) (10 Punkte)
Isomorphietypen von Gruppen einer Ordnung $n \in \mathbb{N}$ sind Gruppen, so dass jede Gruppe der Ordnung n zu genau einer dieser Gruppen isomorph ist.

(a) Gib (ohne Begründung) Isomorphietypen aller Gruppen der Ordnungen von 1 bis 7 an.

(b) Bestimme Isomorphietypen aller Gruppen der Ordnung 51.

(c) Bestimme Isomorphietypen aller *abelschen* Gruppen der Ordnung 60.

(d) Bestimme Isomorphietypen aller *abelschen* Gruppen der Ordnung 81.

Lösung:

(a) In der Aufgabe H25 haben wir diese Klassifikation schon durchgeführt:

n	Isomorphietypen von Gruppen der Ordnung n
1	$\{1\}$
2	C_2
3	C_3
4	$C_4,\ C_2 \times C_2$
5	C_5
6	$C_6,\ S_3 \cong D_3 \cong C_3 \rtimes C_2$
7	C_7

(b) 51 zerfällt in die Primfaktoren 3 und 17 und $17 \neq 1 \bmod 3$, also ist nach Aufgabe G41 jede Gruppe von Ordnung 51 abelsch. Somit sind alle Gruppen der Ordnung 51 isomorph zu $C_{51} \cong C_3 \times C_{17}$.

(c) Nach dem Klassifikationssatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen (Theorem II.3.3) ist jede abelsche Gruppe der Ordnung 60 isomorph zu einem direkten Produkt von zyklischen Gruppen und die Ordnungen dieser Gruppen multiplizieren sich zu 60. Wegen $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ und aufgrund von Folgerung I.3.5 ergeben sich also höchtens zwei verschiedene Isomorphietypen, zum Beispiel:

$$C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_5 \text{ und } C_4 \times C_3 \times C_5.$$

Die obigen zwei Gruppen nicht isomorph zueinander, da in der zweiten Gruppe ein Element der Ordnung 4 existiert, in der ersten aber nicht.

(d) Nach dem Klassifikationssatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen ist jede abelsche Gruppe der Ordnung 81 isomorph zu einem direkten Produkt

$$C_{3^{k_1}} \times \ldots \times C_{3^{k_n}}.$$

Dabei gilt aus Ordnungsgründen $k_1 + \ldots + k_n = 4$. Das ergibt die folgenden Isomorphietypen:

Gruppe	Elementordnungen
$C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3$	$1, 3$
$C_3 \times C_3 \times C_9$	$1, 3, 9$
$C_3 \times C_{27}$	$1, 3, 9, 27$
C_{81}	$1, 3, 9, 27, 81$
$C_9 \times C_9$	$1, 3, 9$

Die ersten 4 Gruppen sind paarweise nicht isomorph aufgrund der vorkommenden verschiedenen Elementordnungen. Die zweite ist nicht zur letzten Gruppe isomorph, da die letzte

Gruppe 8 Elemente der Ordnung 3 hat, nämlich $(1,\zeta^3)$, $(1,\zeta^6)$, $(\zeta^3,1)$, (ζ^3,ζ^3), (ζ^3,ζ^6), $(\zeta^6,1)$, (ζ^6,ζ^3) und (ζ^6,ζ^6) für den Erzeuger $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{9}}$ der C_9, aber die zweite Gruppe hat mehr als 8 Elemente der Ordnung 3, zum Beispiel $(1,1,\zeta^3)$, $(1,1,\zeta^6)$, $(1,\eta,1)$, $(1,\eta,\zeta^3)$, $(1,\eta,\zeta^6)$, $(1,\eta^2,1)$, $(1,\eta^2,\zeta^3)$, $(1,\eta^2,\zeta^6)$ und $(\eta,1,1)$ für den Erzeuger $\eta := e^{\frac{2\pi i}{3}}$ der C_3.

4. Aufgabe(Eine Gruppenwirkung auf $\mathbb{C}$) (10 Punkte)

(a) Zeige, dass folgende Menge Untergruppe von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ ist:

$$G := \mathrm{AGL}(1,\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

(b) Wir definieren $\sigma : G \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(g,z) \mapsto g.z$ durch $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).z := az + b$. Zeige, dass σ Gruppenwirkung ist. Ist sie transitiv? Wieso kürzt man die Gruppe G mit $\mathrm{AGL}(1,\mathbb{C})$ ab?

(c) Seien $z_1 \neq z_2$ und $w_1 \neq w_2$ in $\mathbb{C}$. Zeige: Es gibt genau ein $g \in G$ mit $g.z_1 = w_1$ und $g.z_2 = w_2$.

(d) Sei $g \in G$. Zeige, dass die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto g.z$ die Abstände in $\mathbb{C}$ um einen festen positiven Faktor streckt. *Hinweis:* Der Abstand zweier Punkte $z, z' \in \mathbb{C}$ ist $|z - z'|$.

(e) Zeige: Unter σ gehen Kreise in Kreise und Geraden in Geraden über.

Lösung:

(a) Es ist $G \subseteq \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, da für alle $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a \cdot 1 = a \neq 0.$$

Für das Produkt zweier Elemente von G ergibt sich

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab'+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G\,.$$

Weiter ist die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ ein Element von G, und für die inverse Matrix eines Elements von G berechnen wir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G\,.$$

(b) Es ist $\mathbf{1}.z = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).z = 1 \cdot z + 0 = z$ und

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).z &= \begin{pmatrix} aa' & ab'+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.z = aa'z + ab' + b = a(a'z+b') + b \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.(a'z+b') = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.z \right), \end{aligned}$$

also haben wir mit σ eine Gruppenwirkung.
Die Wirkung ist natürlich transitiv, da für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & w-z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.z = w.$$

Die Gruppe G wirkt auf $\mathbb{C}$ als affine $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen, die invertierbar sind. Somit ist $\mathrm{AGL}(1,\mathbb{C})$ die allgemeine affin-lineare Gruppe der Dimension 1 über $\mathbb{C}$.

(c) Es gilt

$$\left.\begin{array}{rcl} az_1 + b & = & w_1 \\ az_2 + b & = & w_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & 1 \\ z_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & 1 \\ z_2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_1 - z_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{w_1 - w_2}{z_1 - z_2} \ (\neq 0) \quad \text{und} \quad b = \frac{z_1 w_2 - z_2 w_1}{z_1 - z_2}.$$

(d) Für $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$ und $z, z' \in \mathbb{C}$ berechnen wir

$$|g.z - g.z'| = |a(z - z')| = |a| \cdot |z - z'|,$$

woraus die Behauptung ersichtlich ist.

(e) Für $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $a = re^{i\phi}$ ($r > 0$, $\phi \in \mathbb{R}$) ist das Bild des Kreises $\{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_1| = R\}$ der Kreis

$$\{g.z \colon |z - z_1| = R\} = \{g.z \in \mathbb{C} \colon |g.z - g.z_1| = rR\} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - g.z_1| = rR\},$$

wobei die erste Gleichheit aus Teil (d) folgt. Haben wir eine Gerade $L := \{z + \lambda \cdot w : \lambda \in \mathbb{R}\}$ für gewisse $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, so ist

$$g.L = \{g.(z + \lambda \cdot w) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(az + b) + \lambda \cdot aw : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

also eine Gerade, weil $aw \neq 0$ wegen $a, w \neq 0$.