



14. Übungsblatt zur „Einführung in die Algebra für M, MCS, LaG“

Gruppenübung

Aufgabe G40 (Vermischte Fragen)

Im Folgenden sei $(G, \cdot, 1)$ immer eine endliche Gruppe und $g \in G$.

- (a) Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen?
- $x \mapsto gx$
 - $x \mapsto xg$
 - $x \mapsto gxg^{-1}$
- (b) Sei $\phi : G \rightarrow C_k$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus und $|G| = 10$. Welche Werte kann k annehmen?
- (c) Sei σ eine Wirkung von G auf sich durch Konjugation. Welche Aussagen sind dann richtig?
- Die Wirkung σ induziert eine Wirkung auf allen Untergruppen.
 - Die Wirkung σ induziert eine Wirkung nicht auf allen Untergruppen, sondern nur auf den Normalteilern.
 - Die Wirkung σ induziert eine Wirkung nicht auf allen Untergruppen, sondern nur auf den p -Untergruppen (p prim).

Aufgabe G41 (Klassifikation der Gruppen der Ordnung pq)

In der folgenden Aufgabe wollen wir die Sylowsätze verwenden, um die Gruppen der Ordnung pq zu bestimmen, wobei p und q Primzahlen sind. Wir nehmen desweiteren an, dass $p < q$.

- (a) Zunächst ein Beispiel: Benutze die Sylowsätze, um zu zeigen, dass eine Gruppe der Ordnung 15 einen Normalteiler der Ordnung 5 und einen der Ordnung 3 hat. Folgere daraus, dass alle Gruppen der Ordnung 15 abelsch sein müssen.
- (b) Wie sieht das bei Gruppen der Ordnung 14 mit den Normalteilern aus? Es gibt auch mindestens eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 14 (Welche?). Welches Argument aus (a) konntet ihr nicht mehr anwenden?
- (c) Zeige nun allgemein, dass jede Gruppe der Ordnung pq einen Normalteiler der Ordnung q hat.
- (d) Zeige nun, dass die Gruppen der Ordnung pq sich immer als semi-direktes Produkt kleinerer Gruppen schreiben lassen.
- (e) Zeige, dass es nur dann nicht-abelsche Gruppen der Ordnung pq geben kann, wenn $q \equiv 1 \pmod p$. Wieviele nicht-isomorphe Gruppen gibt es in diesem Fall?