Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Bokowski
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan
Dr. Lars Schewe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008
22. Januar 2008

13. Übungsblatt zur „Einführung in die Algebra für M, MCS, LaG“

Gruppenübung

Aufgabe G37 (Abelsche Gruppen)

Betrachte nocheinmal den Klassifikationssatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen.

(a) Erläutere in eigenen Worten, warum es für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G einen surjektiven Homomorphismus $\pi : \mathbb{Z}^k \to G$ gibt. Wie findet man ein richtiges k?

(b) Nun zeige, dass jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G isomorph zu $Z^n/\operatorname{im}\phi$ ist, wobei $\phi : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ ein Homomorphismus ist. Dabei darfst Du benutzen (oder mithilfe des Skripts beweisen), dass jede Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe wieder endlich erzeugt ist.

(c) Wir nehmen nun an, der Homomorphismus ϕ sei durch eine Matrix A beschrieben. Versuche nun, den Isomorphietyp der Gruppen zu bestimmen, die auftreten, wenn A jeweils eine der untenstehenden Matrizen ist:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Aufgabe G38 (Graphensymmetrie)

Zurückgehend auf das Beispiel in der Vorlesung wollen wir üben, die Ordnung der Symmetriegruppe von Graphen zu bestimmen. Hierzu geben wir eine formale Definition eines Graphen: Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein Paar einer Eckenmenge V und einer Menge E von Kanten, wobei E eine Teilmenge der zweielementigen Teilmengen von V ist.

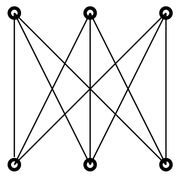

Abbildung 1: Der Graph $K_{3,3}$

(a) Identifiziere für das obige Beispiel die Mengen V und E.

(b) Definiere mit der obigen Definition von Graph, den Begriff der Symmetriegruppe eines Graphen allgemein.

(c) Bestimme nun mit der Bahngleichung die Ordnung der Symmetriegruppe des obigen Graphen. Welchen weiteren Eigenschaften der Gruppe kannst Du angeben?

Aufgabe G39 (p-Untergruppen abelscher Gruppen)
Sei $(G, 0, +)$ eine abelsche Gruppe, p eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}$, so dass $p^k \mid |G|$. Zeige, dass die Menge $\{g : \operatorname{ord} g \mid p^k\}$ eine Untergruppe in G ist.

Hausübung

Aufgabe H42 (Symmetrie bei Polynomen) (4 Punkte)
In der folgenden Aufgabe wollen wir uns mit der Symmetrie von Polynomen beschäftigen. Dabei gehen wir von der Wirkung aus bei der zwei Polynome in der gleichen Bahn liegen, wenn sie durch umbenennen der Variablen auseinander hervorgehen.

(a) Beschreibe die obige Gruppenwirkung nun formal und prüfe die beiden Bedingungen für eine Gruppenwirkung nach. (Hinweis: Beachte, dass die symmetrische Gruppe nicht abelsch ist.)

(b) Bestimme die entsprechende Symmetriegruppe bei folgenden Funktionen:

i. $(x, y) \mapsto x^2y + y^2x$

ii. $(x, y, z) \mapsto x^2y + y^2z + z^2x$

iii. $(x, y, z) \mapsto x^3y + y^3z + z^3x - xy^3 - yz^3 - zx^3$

(c) Wir betrachten die Menge $\mathcal{S}_n$ aller Polynome in n Variablen, deren Symmetriegruppe die volle symmetrische Gruppe S_n ist. Zeige, dass $\mathcal{S}_n$ ein *Ring* ist (d.h. dass $(\mathcal{S}_n, +, 0)$ eine abelsche Gruppe ist und $\mathcal{S}_n$ bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist).

(d) Gib für $n = 2$ eine (möglichst kleine) Menge $\mathcal{B}_n$ von Polynomen an, so dass die Menge $\mathcal{B}_n$ den Ring $\mathcal{S}_n$ erzeugt (d.h. jedes Element $f \in \mathcal{S}_n$ lässt sich durch Summen- und Produktbildung aus den Elementen von $\mathcal{B}_n$ erzeugen).

(e)* Gib $\mathcal{B}_n$ für weitere n an. Kannst Du einen allgemeinen Satz angeben?

Aufgabe H43 (Noch eine abelsche Gruppe) (4 Punkte)
Bestimme den Isomorphietyp der Gruppe $G = \mathbb{Z}^3/(\operatorname{im} A)$, mit A wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 9 & 4 & 12 & -2 \end{pmatrix}$$

Überlege Dir dazu, welche Operationen des Gauss-Algorithmus das Bild (über $\mathbb{Z}$!) invariant lassen.

Aufgabe H44 (Der Petersen-Graph) (4 Punkte)

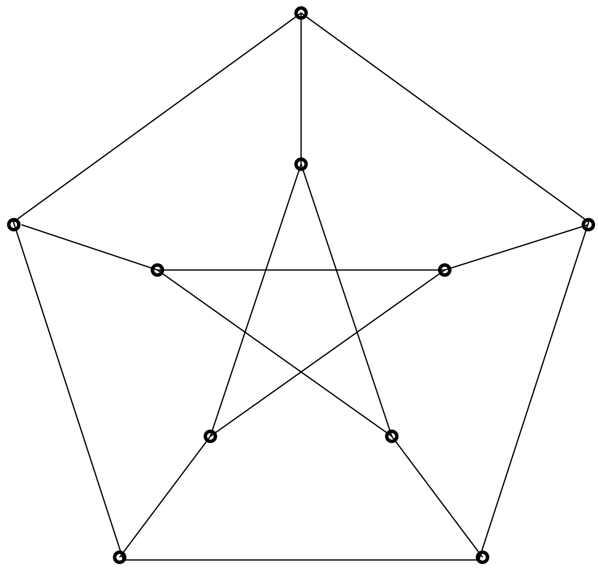

Abbildung 2: Der Petersen-Graph

Bestimme die Ordnung der Symmetriegruppe des Petersen-Graphs! Gehe dabei so vor, wie in Aufgabe G38.