Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Bokowski
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan
Dr. Lars Schewe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008
15.–17. Januar 2008

12. Übungsblatt zur „Einführung in die Algebra für M, MCS, LaG“

Gruppenübung

Aufgabe G34 (Würfelgruppe)

Um die Symmetriegruppe des Würfels besser zu verstehen, betrachten wir die Ecken des $[0,1]$-Würfels als Dreitupel von Nullen und Einsen.

(a) Die Gruppe S_3 wirkt auf solche Dreitupel durch Vertauschen der Koordinaten. Mache Dir am Würfel klar, was diese Wirkung geometrisch bedeutet.

(b) Beschreibe die Bahnen der Wirkung und prüfe die Bahngleichung und den Satz von Burnside an diesem Beispiel nach.

(c) Die Gruppe C_2 wirkt auf jeder Koordinate einzeln durch das Vertauschen von $0/1$, somit wirkt C_2^3 auf den Dreitupeln. Was bedeutet diese Wirkung geometrisch?

(d) Beschreibe die Bahnen der Wirkung und prüfe die Bahngleichung und den Satz von Burnside an diesem Beispiel nach.

Aufgabe G35 (Zählen)

Wir wollen alle Möglichkeiten zählen aus m verschiedenen Sorten Perlen eine Halskette der Länge n zu machen. Wir gehen dabei davon aus, dass die Halskette geschlossen und zwischen allen Perlen jeweils der gleiche Abstand ist.

(a) Modelliere das Problem mit Gruppenwirkungen.

(b) Versuche für möglichst viele Paare (m, n) die Zahl der möglichen Halsketten zu bestimmen. Wenn Dir das zu schwer ist, kannst Du Dir auch zuerst vorgeben, wieviel Perlen jeder Farbe in der Kette vorkommen sollen.

Aufgabe G36 (Wiederholung: semidirekte Produkte)

(a) Zeige: Sei G eine endliche Gruppe H ein Normalteiler von G und K eine Untergruppe in G, so dass $G = HK$ und $H \cap K = \{1\}$. Dann ist gibt es ein $\alpha : K \to \mathrm{Aut}(H)$, so dass $G \cong H \rtimes_\alpha K$

(b) Sei V ein K-Vektorraum. Zeige: Die affine Gruppe $A(V)$ ist semidirektes Produkt der linearen Gruppe und der Translationsgruppe.

(c) Zeige: Die Würfelgruppe ist ein semidirektes Produkt von C_2^3 und S_3.

(d) Zusatz: Zeige, dass die Quaternionengruppe H weder einfach ist, noch sich als semidirektes Produkt zweier kleinerer Gruppen schreiben lässt.

Hausübung

Aufgabe H39 (nochmal Zählen) (4 Punkte)

Sei $M_{m,n}$ die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus $\{0,1\}$. Wir betrachten nun die Gruppe $G_{m,n}$, die auf $M_{m,n}$ durch Permutation der Zeilen und Spalten wirkt.

(a) Beschreibe G als Produkt von einfacheren Gruppen.

(b) Bestimme die Zahl der Bahnen auf $M_{m,n}$ unter der Wirkung von $G_{m,n}$ zunächst für $m = 1$ und n beliebig und dann für $(m,n) \in \{(2,2),(2,3)\}$.

(c*) Bestimme die Anzahl der Bahnen für weitere Paare (m,n).

Aufgabe H40 (Der Satz von Burnside? – nicht ganz) (4 Punkte)

Sei X eine endliche Menge und G eine endliche Gruppe und $\sigma : G \times X \to X$ eine transitive Wirkung von G auf X.

Zeige:

$$|X/G_x| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|^2$$

Aufgabe H41 (treue Permutationsdarstellungen) (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und $n \in \mathbb{N}$. Einen Gruppenhomomorphimus von G nach S_n nennen wir eine Permutationsdarstellung. Wir nennen eine solche Darstellung *treu*, wenn der obige Homomorphismus injektiv ist. Finde für die folgenden Gruppen eine Permutationsdarstellung. Prüfe dann nach, ob Deine gefundenen Darstellungen treu sind. Versuche nun, treue Darstellungen mit möglichst kleinem n zu finden.

(a) D_4.

(b) Die Quaternionengruppe (siehe H 26).

(c*) D_6.