Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Bokowski
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan
Dr. Lars Schewe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008
8.–10. Januar 2008

11. Übungsblatt zur Einführung in die Algebra für M, MCS, LaG

Gruppenübung

Aufgabe G31 (Zykelschreibweise)

(a) Schreibe die Permutationen (1 2 5)(3 4 5) und (2 1 5)(1 2 5) als Produkt von Zykeln mit disjunktem Träger.

(b) Gegeben n: Schreibe die Permutation $i \mapsto n - i + 1$ in Zykeldarstellung.

(c) Gegeben eine Permutation in Zykelschreibweise, wie sieht ihr Inverses aus?

(d) Wie kann man aus der Zykeldarstellung ablesen, ob eine Permutation gerade oder ungerade ist?

(e) Beweise oder widerlege: Die Ordnung einer Permutation gegeben in Zykelschreibweise ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Längen der Zykel, aus denen sie besteht. Beachte, dass wir davon ausgehen, dass alle Zykel disjunkten Träger haben.

Aufgabe G32 (Mehr über die symmetrische Gruppe)

(a) Zeige, dass die Standuntergruppe $(S_n)_n$ des Elements n isomorph zu S_{n-1} ist (hier ist die Standardwirkung von S_n auf $\{1, \dots, n\}$ gemeint – siehe Beispiel II.1.3).

(b) Eine *Transposition* ist eine Permutation der Form $(i\ j)$. Zeige, dass sich jede Permutation als Produkt von Transpositionen schreiben lässt – anders ausgedrückt, zeige, dass die Transpositionen schon die S_n erzeugen. Überlege Dir dazu zunächst, wie Du $(1\ 2 \cdots n)$ Produkt von Transpositionen schreiben kannst.

(c) Zeige, dass schon die Transpositionen $(1\ 2)$, $(2\ 3)$, …, $(n-1\ n)$ die S_n erzeugen.

(d) Zusatz: Zeige, dass schon die Permutationen $(1\ 2\ \cdots\ n)$ und $(1\ 2)$ die S_n erzeugen.

Aufgabe G33 (Gruppenordnungen bestimmen)

(a) Bestimme die Ordnung der Symmetriegruppe eines regulären n-gons.

(b) Bestimme die Ordnung der Symmetriegruppe (oder erstmal nur der Drehgruppe) eines platonischen Körpers Deiner Wahl.

Hausübung

Aufgabe H36 (Die alternierende Gruppe) (4 Punkte)

Die alternierende Gruppe A_n ist die Untergruppe der S_n, die aus den geraden Permutationen besteht. Wir wollen hier ein paar Fakten über diese Gruppen beweisen.

(a) Zeige, dass die Menge der geraden Permutationen, wie behauptet, eine Untergruppe der S_n ist.

(b) Zeige, dass das Produkt von zwei Transpositionen $(a\ b)\ (c\ d)$ sich als Produkt von Zykeln der Länge 3 schreiben lässt. Beachte dabei, dass manche Zahlen in den Transpositionen übereinstimmen können.

(c) Zeige, dass die A_n von den Dreierzykeln erzeugt wird.

(d) Zeige, dass ein echter Normalteiler von S_n, der einen Dreierzykel enthält, schon die A_n sein muss.

(e)* Zeige, dass die A_n für $n \geq 5$ einfach ist. Überlege Dir zunächst dazu, dass für $n \geq 5$ alle Dreierzykel in der A_n zueinander konjugiert sind.

Aufgabe H37 (Eine Anwendung der Bahnformel) (6 Punkte)

Es sei $(G, \cdot, 1)$ eine Gruppe.

(a) Rechne noch einmal selbst nach, dass $\sigma\colon G \times G \to G$, $\sigma(g, x) := gxg^{-1}$ eine Wirkung von G auf G ist.

(b) Der Stabilisator G_x eines Elements $x \in G$ unter der Konjugationswirkung aus Teil (a) wird auch der *Zentralisator von* x genannt. Zeige, dass $G_x = G$ genau dann, wenn x Element des Zentrums $Z(G)$ von G ist.

(c) Die Bahn $\mathcal{O}_x$ von $x \in G$ unter der Konjugationswirkung nennt man die *Konjugationsklasse von* x und schreibt auch $x^G := \mathcal{O}_x$. Was ist 1^G ? Zeige, dass $x^G = \{x\}$ genau dann, wenn $x \in Z(G)$.

(d) Zeige: Ist $|G| = p^n$ eine Primzahlpotenz, so sind auch $|G_x|$ und $|x^G|$ Potenzen von p.

(e) Zeige mit (c) und (d): Ist $|G| = p^n > 1$ eine Primzahlpotenz, so ist $Z(G) \neq \{1\}$. Hinweise: G ist eine disjunkte Vereinigung von Konjugationsklassen; mindestens eine Konjugationsklasse besteht aus nur einem Element.

(f) Zeige mit Teil (e) und Aufgabe H23: Ist G eine Gruppe der Ordnung p^2 (wobei p eine Primzahl ist), so ist G abelsch.

Aufgabe H38 (Konjugationsklassen in der symmetrischen Gruppe $\boldsymbol{S_n}$) (3 Punkte)

(a) Es sei $n \geq 3$ und $\pi \in S_n$. Zeige durch direktes Anwenden auf Elemente der Form $\pi(k)$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$), dass $\pi \circ (1\ \ 2\ \ 3) \circ \pi^{-1} = (\pi(1)\ \ \pi(2)\ \ \pi(3))$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Sind $\sigma, \pi \in S_n$ und kommt in der Zykelzerlegung von σ die zyklische Permutation $(k_1\ \ k_2\ \ \cdots\ \ k_m)$ vor (wobei $m \in \{1, \ldots, n\}$ ist und $k_1, \ldots, k_m \in \{1, \ldots, n\}$ paarweise verschiedene Zahlen sind), so kommt die zyklische Permutation

$$(\pi(k_1)\ \ \pi(k_2)\ \ \cdots\ \ \pi(k_m))$$

in der Zykelzerlegung von $\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$ vor.

(c) Es seien σ und π wie in (b). Zeige, dass für jedes k in der Zykelzerlegung von σ und $\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$ gleich viele Zykel der Länge k vorkommen, d.h. "σ und $\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$ haben den gleichen Zykeltyp."

(d)* Zeige, dass zwei Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ genau dann konjugiert sind (d.h. $\tau = \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$ für ein $\pi \in S_n$), wenn σ und τ den gleichen Zykeltyp haben.