Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Bokowski
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan
Dr. Lars Schewe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008
18. Dezember 2007

10. Übungsblatt zur „Einführung in die Algebra für M, MCS, LaG“

Gruppenübung

Aufgabe G28 (Minitest zu Teil I: Elementare Gruppentheorie)

Die folgenden Fragen sollen einige wichtige Aspekte der elementaren Gruppentheorie abrufen. Du solltest zur Bearbeitung dieser Aufgabe nicht mehr als 20 Minuten aufwenden. Zu jeder Frage können keine, eine oder mehrere Antwortmöglichkeiten richtig sein.

(a) Welche der folgenden Eigenschaften erfüllt jede Gruppe G?
○ Existenz einer eindeutigen Eins ○ Kommutativität ○ Abzählbarkeit
○ Existenz eines eindeutigen Inversen g^{-1} zu jedem $g \in G$ ○ Assoziativität

(b) Seien G, G' Gruppen, $H \leq G, H' \leq G', N \trianglelefteq G, N' \trianglelefteq G'$, $f : G \to G'$ Gruppenmorphismus.
○ $f(H) \leq G'$ ○ $f^{-1}(H') \leq G$ ○ $f(N) \trianglelefteq G'$ ○ $f^{-1}(N') \trianglelefteq G$
○ Auf G/H lässt sich eine Gruppenstruktur definieren, so dass $\pi : G \to G/H, g \mapsto gH$ Gruppenmorphismus ist.
○ Auf G/N lässt sich eine Gruppenstruktur definieren, so dass $\pi : G \to G/N, g \mapsto gN$ Gruppenmorphismus ist.
○ Für $N = \ker(f)$ und $H' = \mathrm{im}(f)$ gilt $G/N \cong H'$.

(c) Seien $N, H \leq G$ Untergruppen einer Gruppe G.
○ $NH \leq G$ ○ $NH \leq G$, wenn $N \trianglelefteq G$ ○ $NH \trianglelefteq G$, wenn $N, H \trianglelefteq G$
○ Wenn $NH = G$, $N \cap H = \{1\}$, dann $N \times H \cong G$.
○ Wenn $N, H \trianglelefteq G$, $NH = G$, $N \cap H = \{1\}$, dann $N \times H \cong G$.
○ Wenn $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$, $NH = G$, $N \cap H = \{1\}$, dann $N \rtimes_\alpha H \cong G$ für ein $\alpha : H \to \mathrm{Aut}(N)$.

(d) Die Gruppe $\mathbb{Z}/600\mathbb{Z}$ ...
○ ... ist zyklisch. ○ ... ist abelsch. ○ ... ist unendlich. ○ ... ist einfach.
○ ... $\cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$. ○ ... $\cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$. ○ ... $\cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/200\mathbb{Z}$.

Aufgabe G29 (Beispiel zu Gruppenwirkungen und Bahnen I)

Gegeben eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\sigma \colon \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \sigma(t, z) := e^{t\lambda} z \,.$$

(a) Zeige, dass σ eine Wirkung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ ist.

(b) Skizziere die Bahnen dieser Wirkung. Wie hängt die Gestalt der Bahnen von λ ab?

Aufgabe G30 (Beispiel zu Gruppenwirkungen und Bahnen II)

(a) Zeige, dass durch

$$\sigma\colon U_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Herm}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Herm}_n(\mathbb{C}), \quad (U, A) \mapsto UAU^*$$

eine Wirkung der unitären Gruppe $U_n(\mathbb{C})$ auf der Menge $\mathrm{Herm}_n(\mathbb{C})$ der hermiteschen $n\times n$-Matrizen definiert wird.

(b) Zeige: Für die Bahnen zweier Matrizen $A, B \in \mathrm{Herm}_n(\mathbb{C})$ gilt $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_B$ genau dann, wenn A und B die gleichen Eigenwerte mit den gleichen Vielfachheiten haben.

(c) Finde ein Repräsentantensystem für die Wirkung von $U_n(\mathbb{C})$ auf $\mathrm{Herm}_n(\mathbb{C})$.

Hausübung

Aufgabe H33 (Beispiel zu Gruppenwirkungen und Bahnen III) (1+2+2+2 Punkte)

Gegeben einen Körper $\mathbb{K}$ und $p, q \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Wirkung der Gruppe

$$G := \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$$

auf den Matrizen in $M_{p,q}(\mathbb{K})$ durch $(g, h).A := gAh^{-1}$.

(a) Zeige: Liegen $A, B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ in derselben Bahn, so sind sie desselben Ranges: $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$.

(b) Es sei $A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. Zeige, dass die Bahn von A eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

enthält, wobei $r := \mathrm{rk}(A)$.

(c) Sei $m := \min(p, q)$. Zeige, dass es genau $m + 1$ Bahnen gibt und dass

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_B \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)\,.$$

Gib ein Repräsentantensystem an.

(d) Es sei V ein q-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und W ein p-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum sowie $\phi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zu Basen $B = (b_1, \ldots, b_q)$ von V und $C = (c_1, \ldots, c_p)$ von W erhalten wir eine Matrix

$$[\phi]^B_C \in M_{p,q}(\mathbb{K})\,,$$

deren j-te Spalte durch den Koordinatenvektor $[\phi(b_j)]_C \in \mathbb{K}^p$ von $\phi(b_j)$ bzgl. der Basis C von W gegeben ist. Zeige: Zwei Matrizen $A, A' \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ liegen genau dann in der gleichen Bahn, wenn es eine lineare Abbildung $\phi\colon V \to W$ und Basen B, B' von V sowie Basen C, C' von W gibt derart, dass

$$A = [\phi]^B_C \qquad \text{und} \qquad A' = [\phi]^{B'}_{C'}\,.$$

Aufgabe H34 (Gedanken zur Einführung in die Algebra / Gruppentheorie) (4 Punkte)

Schreibe deine Gedanken über den Inhalt der Vorlesung, die Gruppentheorie, nieder. Mögliche Gesichtspunkte dabei: Wie stellst du dir Gruppen vor? Was für Eigenschaften haben Gruppen, die sie von anderen mathematischen Objekten unterscheiden? Wieso gibt es den Begriff „Normalteiler“? Und wieso heißen einige Gruppen „einfach“? Warum, glaubst du, beschäftigt man sich überhaupt abstrakt mit Gruppen?

Speziell für Lehramtler: Was bewirkt deiner Meinung nach die Beschäftigung mit Gruppen im Lernprozess? Kann man Gruppen im Schulunterricht behandeln?

Aufgabe H35 (Wichtigste Aufgabe des Jahres) (∞ Punkte)

Feier ein frohes Weihnachtsfest oder verbringe anderweitig die unifreie Zeiten mit deinen Nächsten. Auf ein Jahr 2008 voller Gesundheit, Glück und Erfolg!