Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Bokowski
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan
Dr. Lars Schewe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008
10. Dezember 2007

9. Übungsblatt zur „Einführung in die Algebra für M, MCS, LaG“

Gruppenübung

Aufgabe G25 (Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen)
Wir betrachten die Mengen

$$\Delta := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\},\ G := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \Delta \,\middle|\, a, c \in \mathbb{R}^\times \right\},\ N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Delta \,\middle|\, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeige, dass Δ und G Untergruppen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sind und $G \leq \Delta$ und $N \trianglelefteq \Delta$ gelten.

(b) Zeige, dass $\Delta \cong N \rtimes_\alpha G$ für einen geeigneten Homomorphismus $\alpha \colon G \to \mathrm{Aut}(N)$.
Hinweis: Satz I.3.13.

Aufgabe G26 (Semidirekte Produkte isomorpher Gruppen)
Gegeben seien Isomorphismen von Gruppen $f_1 \colon G_1 \to H_1$ und $f_2 \colon G_2 \to H_2$.

(a) Zeige, dass $f_1 \times f_2 \colon G_1 \times G_2 \to H_1 \times H_2$, $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) := (f_1(x_1), f_2(x_2))$ ein Isomorphismus von Gruppen ist.

(b) Es sei $\alpha : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass für jedes $x \in G_2$ $f_1 \circ \alpha(x) \circ f_1^{-1} \colon H_1 \to H_1$ ein Automorphismus von H_1 ist. Zeige, dass

$$\beta \colon H_2 \to \mathrm{Aut}(H_1), \quad \beta(y) := f_1 \circ \alpha(f_2^{-1}(y)) \circ f_1^{-1}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Zeige, dass $f_1 \times f_2 \colon G_1 \rtimes_\alpha G_2 \to H_1 \rtimes_\beta H_2$ ein Isomorphismus von Gruppen ist.

(c) Es sei Δ die Gruppe der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen, wie in Aufgabe G25. Zeige mit Teil (b), dass Δ isomorph ist zu einem semidirekten Produkt $\mathbb{R} \rtimes_\beta (\mathbb{R}^\times)^2$ der Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $((\mathbb{R}^\times)^2, \cdot)$. Gib $\beta \colon (\mathbb{R}^\times)^2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R})$ explizit an.

Aufgabe G27 (Exakte Folgen und semidirekte Produkte)

Im Folgenden seien A, B, C Gruppen oder Vektorräume (über irgendeinem Körper), $f : A \to B$ sowie $g : B \to C$ Morphismen von Gruppen / Vektorräumen und $\mathbf{0}$ die triviale Gruppe / der triviale Vektorraum. Beachte, dass es jeweils genau einen Morphismus von $\mathbf{0}$ nach A und von C nach $\mathbf{0}$ gibt; diesen gibt man typischerweise keine Namen.

(a) Eine „Folge" von drei Morphismen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ heißt *exakt*, wenn $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$.
Gib jeweils ein Beispiel für eine exakte Folge von Gruppenmorphismen und Vektorraummorphismen an. Dabei seien A, B, C alle von $\mathbf{0}$ verschieden.

(b) Was ist jeweils äquivalent dazu, dass $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ oder $B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$ exakt ist?

(c) Eine Folge von Morphismen $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$, die an jeder Stelle exakt ist, das heißt die drei Folgen $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$, $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ und $B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$ sind exakt, heißt *kurze exakte Folge* oder *Erweiterung B von C durch A*.
Gib jeweils ein Beispiel für eine kurze exakte Folge von Gruppenmorphismen und Vektorraummorphismen an. Dabei seien A, B, C wieder alle von $\mathbf{0}$ verschieden.

(d) Gibt es eine kurze exakte Folge von Gruppenmorphismen $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$ mit abelschen A, C und nicht-abelschem B?

(e) Sei B Gruppe, $A \trianglelefteq B$ Normalteiler, $\iota : A \to B$, $a \mapsto a$ Inklusion und $C := B/A$ Quotientengruppe mit Projektion $\pi : B \to C$, $b \to bA$. Zeige, dass $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow \mathbf{0}$ der Prototyp einer kurzen exakten Folge von Gruppenmorphismen in dem Sinne ist, dass sie selber exakt ist und jede kurze exakte Folge durch Isomorphismen auf diese Form zurückzuführen ist.

(f) Sei $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \mathbf{0}$ eine kurze exakte Folge. Man sagt, dass sie *spaltet*, wenn es einen Morphismus $\sigma : C \to B$ gibt, sodass $g \circ \sigma = \mathrm{id}_C$. In Symbolen schreibt man dann kurz: $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \underset{\sigma}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C \longrightarrow \mathbf{0}$.
Zeige, dass eine solche kurze exakte Folge von Vektorraummorphismen immer spaltet.

(g) Zeige im Gruppen-Fall folgende Äquivalenz:

$$\exists f, g, \sigma : \mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \underset{\sigma}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C \longrightarrow \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \alpha : B \cong A \rtimes_\alpha C.$$

Hinweis: Für „$\Longrightarrow$" kann man mit $v : A \to \mathrm{im}(f), a \mapsto f(a)$ die Abbildungen $\alpha : C \to \mathrm{Aut}(A)$ definiert durch $\alpha(c)(a) := v^{-1}(\sigma(c)f(a)\sigma(c)^{-1})$ und $\Phi : A \rtimes_\alpha C \to B, (a, c) \mapsto f(a)\sigma(c)$ betrachten.

(h) Gib ein Beispiel einer Erweiterung von Gruppen an, die *nicht* spaltet.
Hinweis: Wähle A, C minimal nicht-trivial.

Hausübung

Aufgabe H29 (Semidirekte Produkte abelscher Gruppen) (2 Punkte)

Es seien G und N abelsche Gruppen und $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das semidirekte Produkt $N \rtimes_\alpha G$ genau dann abelsch ist, wenn α trivial ist, d.h. $\alpha(g) = \mathrm{id}_N$ für alle $g \in G$.

Aufgabe H30 (Homomorphismen von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in Gruppen) (1+1 Punkte)

(a) Es sei $(G, \cdot, 1)$ eine endliche Gruppe, $n \in \mathbb{N}$ und $g \in G$ ein Element, dessen Ordnung n teilt. Zeige, dass es einen Gruppenhomomorphismus

$$\phi_g\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to G \quad \text{mit } \phi_g(\overline{1}) = g$$

gibt und zeige, dass ϕ_g eindeutig festgelegt ist.

(b) Zeige: Jeder Gruppenhomomorphismus $\psi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to G$ ist von der in (a) beschriebenen Art.

Aufgabe H31 (Alle Gruppen der Ordnung 10) (1+1+1+1 Punkte)

Es sei G eine Gruppe der Ordnung 10.

(a) Zeige, dass G einen Normalteiler N der Ordnung 5 und eine Untergruppe H der Ordnung 2 besitzt (vgl. Aufgabe G24 und H24). Zeige, dass $G \cong N \rtimes_\alpha H$ für einen Gruppenhomomorphismus $\alpha\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$.

(b) Zeige, dass $G \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rtimes_\beta \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für einen Gruppenmorphismus $\beta\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.
Hinweis: Die Formel aus Aufgabe G26(b) ist hilfreich.

(c) Zeige, dass $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 4 ist.

(d) Wieviele Homomorphismen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ gibt es?
Wieviele Gruppen der Ordnung 10 gibt es bis auf Isomorphie?
Hinweis: Aufgaben H30, H11(d) und H29 sind hilfreich.

Aufgabe H32 (Eine überraschende Isomorphie) (freiwillige Aufgabe ohne Punkte)

(a) Sei V ein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum. Zeige, dass jeder Gruppenhomomorphismus $\phi : V \to V$ der Gruppe $(V, +)$ eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-lineare Abbildung ist.

(b) Schließe, dass $\mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2) = \mathrm{GL}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2)$. Finde die Ordnung von $\mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2)$. Zu welcher Dir bekannten Gruppe ist $\mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2)$ isomorph?

(c) Finde alle Gruppenhomomorphismen $\alpha\colon \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2)$.

(d) Jedes α aus Teil (c) liefert ein semidirektes Produkt $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Zeige, dass es α_1, α_2 gibt mit $\alpha_1 \neq \alpha_2$ aber dennoch

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes_{\alpha_1} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes_{\alpha_2} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Hinweis: Der Isomorphismus ist von der Gestalt $(x, y) \mapsto (x, -y)$.