Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Bokowski
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan
Dr. Lars Schewe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008
5. Dezember 2007

8. Übungsblatt zur „Einführung in die Algebra für M, MCS, LaG“

Gruppenübung

Wir wollen uns diese Woche mit dem von Herrn Bokowski in der Vorlesung vorgestellten Problem der 2-Triangulierungen eines konvexen 8-Ecks beschäftigen. Hierzu definieren wir zunächst ein paar Begriffe. Im Folgenden sei G immer eine Gruppe und X eine Menge.

Definition 1.

1. Eine Abbildung $\sigma : G \times X \to X, (g,x) \to \sigma(g,x) =: g.x$ mit $1.x = x$ und $g.(h.x) = (gh).x$ für alle $x \in X$ und $g, h \in G$ heißt *Wirkung* / *Operation* von G auf X; man sagt: „G wirkt auf X“.

2. Wirke G auf X und sei $x \in X$. Dann heißt die Menge $G.x := \mathcal{O}_x := \{g.x | \, g \in G\}$ G-*Bahn* / G-*Orbit* von x. Die Anzahl der Elemente in einer Bahn wird *Bahnlänge* genannt.

3. Wirke G auf X und sei $x \in X$. Dann heißt die Menge $G_x := \{g \in G | \, g.x = x\}$ *Standgruppe* / *Isotropiegruppe* von x.

Bemerkung 2. Wirke G auf X.

1. Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $X \to X, x \mapsto g.x$ bijektiv und $X \to X, x \mapsto g^{-1}.x$ ist die Inverse. Daher kann man die Elemente von G als Symmetrien von X lesen.

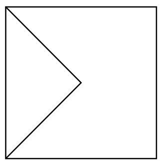
2. Die Bahnen der Wirkung bilden eine Partition von X, das heißt, dass erstens aus $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y \neq \emptyset$ für gewisse $x, y \in X$ schon $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$ folgt, und dass zweitens $X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}_x$ gilt.

3. Standgruppen sind Untergruppen von G.

Zur Bestimmung der Länge einer Bahn kann man die *Bahngleichung* zu Rate ziehen:

Satz 3. *Wirke G auf X und sei $x \in X$. Dann gilt $|\mathcal{O}_x| = |G| : |G_x|$, wenn G und X endlich sind.*

Beispiel 4. Sei $G = D_4$, die wir durch Rotationen um den Mittelpunkt um 90° und Spiegelung an einer gedachten horizontalen Achse durch den Mittelpunkt auf folgende Figur wirken lassen:



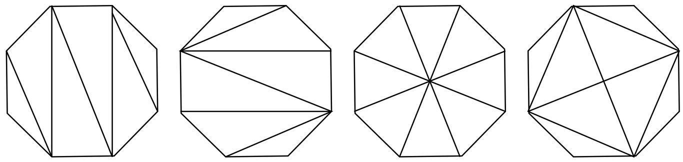
Man sieht entweder direkt, dass die Bahnlänge 4 ist oder man benutzt, dass nur die Spiegelung und die Identität aus D_4 die Figur invariant lassen und rechnet $8 : 2 = 4$.

Als nächstes wenden wir uns den k-triangulierten konvexen n-Ecken zu.

Definition 5. Eine *k-Triangulierung* eines konvexen n-Ecks oder *n-k-Triangulierung* ist eine maximale Menge von Diagonalen, so dass sich niemals $k+1$ dieser Diagonalen paarweise im Inneren des n-Ecks schneiden.

Aufgabe 6.

1. Im Fall $k = 1$ hat man es mit üblichen Triangulierungen zu tun. Welche der Achtecke im nächsten Bild sind also 1-trianguliert?



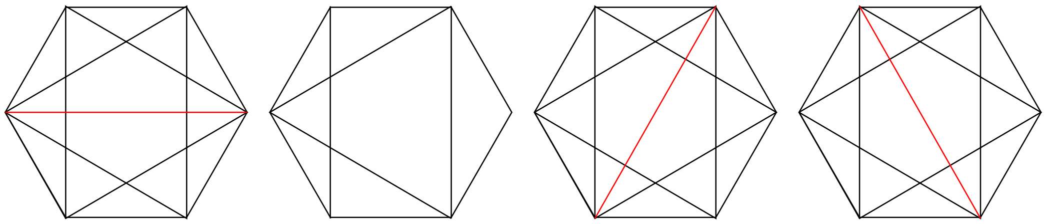
2. Im Fall $k = 2$ ist die Sache etwas komplexer.

   a) Was ist die Anzahl aller Diagonalen eines konvexen n-Ecks?

   b) Warum enthält jede n-2-Triangulierung alle Diagonalen, die genau eine Ecke „überspringen“?

   c) Bei wie vielen Kanten ist also noch fraglich, ob sie zu einer 2-Triangulierung gehören? Was ist diese Zahl in den Fällen Fall $n = 6, 7, 8$?

   d) Welche der folgenden Figuren sind 6-2-Triangulierungen? Wie viele 6-2-Triangulierungen gibt es insgesamt?



Aufgabe 7. Bestimme zu jeder 8-2-Triangulierung auf dem Blatt „triang82.pdf“ die entsprechende Bahnlänge unter der Wirkung von D_8. Welche 8-2-Triangulierungen gehören in dieselbe Bahn?

Aufgabe 8. Vollziehe den Quelltext „kt Vorlesung.hs“ nach. Was leisten die einzelnen Teilfunktionen, was das ganze Programm?

Aufgabe 9. Wir konstruieren einen Graphen, dessen Ecken für je eine 8-2-Triangulierung stehen. Zwischen zwei Ecken des Graphen befindet sich genau dann eine Kante, wenn die zugehörigen 8-2-Triangulierungen identisch sind bis auf eine Kante. Der dabei entstehende Graph ist auf den Blättern „graph82structure.pdf“ , „graph82structureWithLabels.pdf“ und „graph82structurePart2.pdf“ veranschaulicht.
Offene Aufgabe: Was ist die Symmetriegruppe dieses Graphen, das heißt welche Bewegungen des Raumes bilden den Graphen wieder auf sich ab?

Hausübung

Aufgrund der außerordentlichen Beschäftigung mit dem offenen Problem der 8-2-Triangulierungen gibt es diese Woche keine regulären Hausübungen. Als zusätzliche „Hausaufgabe“ für diese Woche wird die Wiederholung der neu gelernten Begriffe und Sätze der letzten Wochen empfohlen.