Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Bokowski
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan
Dr. Lars Schewe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008
26. November 2007

7. Übungsblatt zur „Einführung in die Algebra für M, MCS, LaG“

Gruppenübung

Aufgabe G22 (Ordnungen konkret berechnen)

(a) Gegeben $n, m \in \mathbb{Z}$ bestimme die Ordnung von $\overline{m}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(b) Es seien G, H endliche Gruppen und $x \in G$, $y \in H$. Drücke die Ordnung von $(x, y) \in G \times H$ durch die Ordnung von x in G und die von y in H aus.

Hinweis: Untersuche den Kern des Homomorphismus'

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z} &\longrightarrow G \times H \\ n &\longmapsto (x, y)^n = (x^n, y^n). \end{aligned}$$

(c) Finde die Ordnung des Elements $(\overline{6}, \overline{15})$ in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/95\mathbb{Z}$.

Aufgabe G23 (Gruppen mit $x^2 = 1$)

Es sei $(G, +, 0)$ eine endliche abelsche Gruppe derart, dass $x + x = 0$ für alle $x \in G$.

(a) Zeige, dass G mit der Abbildung $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G \to G$, die durch $\phi(\overline{0}, g) := 0$ und $\phi(\overline{1}, g) := g$ definiert ist, als Skalarmultiplikation zu einem Vektorraum über dem 2-elementigen Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wird.

(b) Zeige, dass die Ordnung von G eine Potenz von 2 ist.

Aufgabe G24 (Alle abelschen Gruppen der Ordnung 6)

Es sei G eine Gruppe der Ordnung 6.

(a) Zeige, dass G ein Element a der Ordnung 3 enthält.

Hinweis: Sonst hätte jedes von 1 verschiedene Element die Ordnung 2. (Warum?) Wegen $x^2 = 1$ für alle $x \in G$ wäre G nach H21(a) abelsch. Führe dies mit G23(b) zum Widerspruch.

(b) Zeige, dass G ein Element b der Ordung 2 enthält, gemäß folgender Anleitung:
1. Zeige, dass andernfalls jedes von 1 verschiedene Element von G die Ordnung 3 haben müsste.
2. Zeige, dass sich dann G schreiben ließe als eine Vereinigung $G = \bigcup_{j=1}^{m} H_j$ gewisser paarweise verschiedener Untergruppen $H_1, \ldots, H_m \subseteq G$ der Ordnung 3. Was ist $H_i \cap H_j$ für $i \neq j$? Drücke nun die Gruppenordnung $|G|$ mittels m aus und führe einen Widerspruch herbei.

(c) G sei nun zusätzlich abelsch. Zeige, dass $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Hausübung

Aufgabe H24 (Alle nicht-abelschen Gruppen der Ordnung 6) (1+1+1 Punkte)

Es sei G eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 6; dann existieren Elemente $a, b \in G$ der Ordnungen 3 und 2 (siehe Aufgabe G24).

(a) Begründe, warum $\langle a \rangle$ ein Normalteiler von G ist.

(b) Nach Teil (a) gilt $b^{-1}ab \in \langle a \rangle$, also $b^{-1}ab = a^i$ für ein $i \in \{0, 1, 2\}$. Zeige, dass $i \neq 0$. Zeige, dass auch $i \neq 1$, weil G sonst abelsch wäre. Es gilt also $b^{-1}ab = a^2$ und somit $ab = ba^2$.

(c) Zeige, dass $G = \langle a, b \rangle$ und $G \cong D_3$, wobei D_3 die Diedergruppe aus Aufgabe H22 ist.

Aufgabe H25 (Alle Gruppen bis zur Ordnung 7) (2 Punkte)

Bestimme bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung ≤ 7. Frühere Aufgaben dürfen und sollen benutzt werden.

Aufgabe H26 (Eine neue Gruppe der Ordnung 8: die Quaternionengruppe) (1+1+1+1 Punkte)

Wir betrachten die mit allen Matrizen vertauschende 2×2-Matrix $\mathbf{m} := -E_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sowie die invertierbaren komplexen 2×2-Matrizen

$$\mathbf{i} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass $\mathbf{m}^2 = E_2$, $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{m}$, $\mathbf{ij} = \mathbf{mji}$.

(b) Zeige, dass $Q := \{\mathbf{m}^a\mathbf{i}^b\mathbf{j}^c : a, b, c \in \{0, 1\}\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist. Zeige, dass Q die Ordnung 8 hat.

(c) Wir schreiben $\mathbf{k} := \mathbf{ij}$. Zeige, dass $\mathbf{k}^2 = \mathbf{m}$. Bestimme die Ordnung jedes Elements von Q.

(d) Bestimme alle Untergruppen von Q. Zeige, dass jede ein Normalteiler ist.

Aufgabe H27 (Zerlegung in Untergruppen von Primzahlpotenzordnung) (1+1+1 Punkte)

Es sei $(G, \cdot, 1)$ eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung n.

(a) Es sei $n = n_1 n_2$ für teilerfremde Zahlen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $G_{n_i} := \{x : x^{n_i} = 1\}$ für $i \in \{1, 2\}$ eine Untergruppe von G ist, und dass $G \cong G_{n_1} \times G_{n_2}$. (Hinweis: Benutze Satz I.3.7; zum Beweis von $G = G_{n_1} G_{n_2}$ benutze additive Darstellung des ggT).

(b) Zeige, dass $|G_{n_1}| = n_1$ und $|G_{n_2}| = n_2$. Anleitung: Zeige zunächst, dass jeder Primteiler von $N := |G_{n_1}|$ die Zahl n_1 teilt (und analog jeder von $|G_{n_2}|$ die Zahl n_2); hierzu wende den Homomorphiesatz auf den surjektiven Homomorphismus

$$\phi\colon \langle x_1 \rangle \times \cdots \times \langle x_N \rangle \to G_{n_1}, \quad \phi(y_1, \ldots, y_N) := y_1 y_2 \cdots y_N$$

an, wobei $G_{n_1} = \{x_1, \ldots, x_N\}$ (dass ϕ ein Homomorphismus ist, soll nicht überprüft werden). Schließe nun, dass $N = n_1$.

(c) Es sei $n = p_1^{i_1} \cdots p_m^{i_m}$ die Primfaktorzerlegung von n, mit Exponenten $i_j \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$. Wir schreiben $q_j := p_j^{i_j}$. Zeige, dass

$$G \cong G_{q_1} \times \cdots \times G_{q_m}$$

(mit Notation wie in (a)).

Aufgabe H28 (Matrizen endlicher Ordnung) (freiwillige Aufgabe ohne Punkte)

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Matrix derart, dass $A^m = E_n$.

(a) Welche Eigenwerte kann eine solche Matrix A haben?

(b) Zeige (zum Beispiel mit Hilfe der Jordanschen Normalform), dass A diagonalisierbar ist.