Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Bokowski
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan
Dr. Lars Schewe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008
19. November 2007

6. Übungsblatt zur „Einführung in die Algebra für M, MCS, LaG“

Gruppenübung

Aufgabe G19 (Lie-Gruppen)

Zahlen messen Größe, Gruppen messen Symmetrie: Eine Zahl kann den Flächeninhalt eines Quadrates beschreiben, aber um zu beschreiben, wie das Quadrat bewegt werden kann, so dass es wieder auf sich abgebildet wird, reichen Zahlen nicht aus; die Diedergruppe D_4 leistet dies.

Die Symmetrien einer „eckigen“ Figur wie eines Quadrates sind aber wiederum von denen einer Kreisscheibe $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ verschieden: Die Scheibe kann man, im Gegensatz zum Quadrat, um einen beliebig kleinen Winkel drehen und somit eine Symmetrie erhalten. Um solche Symmetrien adäquat beschreiben zu können, stattet man Gruppen mit mehr Struktur aus und erhält die sogenannten Lie-Gruppen:

Eine offene Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^N$ heißt *Lie-Gruppe*, wenn es $\mu : G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto \mu(g, h) =: g \cdot h$ und $1 \in G$ gibt, so dass $(G, \mu, 1)$ eine Gruppe ist und die Abbildungen $\mu : G \times G \to G$ und $\eta : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ glatt sind, das heißt beliebig oft partiell differenzierbar.

(a) Begründe kurz (also ohne explizite Berechnung von Ableitungen usw.), dass die Menge der reellen invertierbaren $n \times n$-Matrizen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit der Matrizenmultiplikation und der Einheitsmatrix eine Lie-Gruppe bilden.

Hinweis: Welche wichtige Eigenschaft, die du aus der Analysis I und II kennst, hat die Abbildung $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$? Die Menge $\mathbb{R}^\times \subseteq \mathbb{R}$ ist offen im Sinne der Analysis.

(b) Nach einem nicht ganz so einfach zu beweisenden Satz ist eine im Sinne der Analysis abgeschlossene Untergruppe H einer Lie-Gruppe G selber wieder eine Lie-Gruppe.[1] Begründe nun, warum $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ einerseits ein Normalteiler von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist und andererseits eine Lie-Gruppe.

(c) Ist

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} : t \in [0, 2\pi] \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : t \in [0, 2\pi] \right\}$$

eine Lie-Gruppe?

(d) Mache dir klar, dass die Lie-Gruppe $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ Symmetrien von A beschreibt.

Bemerkung: Dass $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ die *volle* Symmetrie-Gruppe von A ist, ergibt sich daraus, dass Symmetrien von A den Schwerpunkt 0 fixieren und orthogonale Abbildungen sind (siehe Seiten 49-53 im Skript).

[1] H ist in diesem Fall zwar nicht unbedingt eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^N$, aber eine Untermannigfaltigkeit, was für die Definition einer Lie-Gruppe ausreicht.

Aufgabe G20 ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ über einem endlichen Körper)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen.

(a) Bestimme die Ordnung der Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$.
Anleitung: Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{F})$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Spalten $s_1, \ldots, s_n$ linear unabhängig sind. Wir beginnen also mit irgendeiner 1. Spalte $s_1 \neq 0$ (wieviele davon gibt es ?) Die 2. Spalte s_2 darf dann kein skalares Vielfaches der 1. sein, was q mögliche Spalten ausschließt. Die 3. Spalte darf keine Linearkombination der 1. und 2. sein, was q^2 Möglichkeiten ausschließt, etc.

(b) Zeige, dass der Homomorphismus $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^\times$ surjektiv ist.

(c) Zeige, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}^\times$. Bestimme nun mit dem Satz von Lagrange die Ordnung der Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$.

Aufgabe G21 (Zentrum der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(a) Bestimme alle Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ derart, dass

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A \qquad \text{und} \qquad A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A\,.$$

(b) Zeige, dass das Zentrum $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{K}))$ genau aus den Vielfachen aE_2 der Einheitsmatrix besteht, mit $a \in \mathbb{K}^\times$.

(c) Zeige, dass $Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \cap Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{K}))$.

(d) Was ist das Zentrum der speziellen linearen Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$?

(e) Zeige, dass es zu jeder Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ein $B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ und ein $a \in \mathbb{C}^\times$ gibt derart, dass $A = B \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

(f) Es sei $q\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))$ der Quotientenhomomorphismus und $\lambda\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $A \mapsto A$ die Inklusionsabbildung. Schließe mit (e), dass der Homomorphismus $f := q \circ \lambda\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ surjektiv ist. Zeige, dass $\ker f = Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$. Schließe mit Folgerung I.2.17, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Analog sieht man, dass $Z(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{aE_n \colon a \in \mathbb{K}^\times\}$ und $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{C}) \cong \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$.

Hausübung

Aufgabe H20 (Zyklische Gruppen) (2 Punkte)
Zeige, dass jede Gruppe G von Primzahlordnung zyklisch ist. Es sei p die Ordnung von G. Wieviele der Gruppenelemente erzeugen die Gruppe G?

Aufgabe H21 (Alle Gruppen der Ordnung 4) (1+1+1 Punkte)

(a) Es sei G eine Gruppe derart, dass $x^2 = 1$ für jedes $x \in G$. Zeige, dass dann $x = x^{-1}$ für alle $x \in G$. Zeige, dass G abelsch ist.

(b) Es sei G eine abelsche Gruppe; V und W seien Untergruppen von G. Zeige, dass die Abbildung

$$\alpha\colon V \times W \to G, \quad \alpha(v, w) := vw$$

ein Gruppenhomomorphismus ist, mit $\ker \alpha = \{(v, v^{-1})\colon v \in V \cap W\}$.

(c) Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung 4 abelsch ist.
Hinweis: Welche Ordnungen kommen für Gruppenelemente überhaupt in Frage? Was passiert, wenn es ein Element der Ordnung 4 gibt? Bestimme nun bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 4.

Aufgabe H22 (Die Diedergruppe D_3) (1+1+1+1 Punkte)

(a) Es sei G eine Gruppe, die von zwei Elementen a, b erzeugt wird, welche die Relationen $a^3 = b^2 = 1$ und $ab = ba^2$ erfüllen. Zeige, dass sich jedes Element von G in der Form $a^i b^j$ mit $i \in \{0, 1, 2\}$ und $j \in \{0, 1\}$ schreiben lässt.

(b) Finde Matrizen $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ derart, dass die Relationen aus (a) erfüllt sind und die von A, B erzeugte Untergruppe $D_3 := \langle A, B \rangle \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ die Ordnung 6 hat. Finde ein Dreieck $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$, welches von den den Elementen $M \in D_3$ entsprechenden linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto Mv$ surjektiv auf sich selbst abgebildet wird.

Hinweis: Vgl. Aufgabe G10! Die Interpretation als Symmetrien eines Dreiecks hilft beim Erraten von A und B!

(c) Finde alle Untergruppen der Gruppe D_3. Welche sind Normalteiler?

(d) Zeige, dass für jede Gruppe G und Elemente $a, b \in G$ wie in (a) die Abbildung

$$\phi\colon D_3 \to G, \quad \phi(A^i B^j) := a^i b^j \qquad \text{für } i \in \{0, 1, 2\},\ j \in \{0, 1\}$$

surjektiv ist und ein Gruppenhomomorphimus. Bestimme nun (bis auf Isomorphie) alle möglichen Gruppen G der in (a) beschriebenen Art.

Aufgabe H23 ($G/Z(G)$ ist niemals nicht-trivial zyklisch) (freiwillige Aufgabe ohne Punkte)
Es sei G eine Gruppe und N eine Untergruppe des Zentrums $Z(G)$ derart, dass G/N zyklisch ist. Wir wählen $x \in G$ derart, dass xN ein Erzeuger von G/N ist.

(a) Zeige, dass sich jedes Element $g \in G$ in der Form $g = x^n z$ schreiben lässt für eine geeignete ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ und eine geeignetes Element $z \in N$.

(b) Zeige, dass G abelsch ist.

(c) Zeige, dass es keine Gruppe H gibt, so dass $H/Z(H)$ eine nicht-triviale zyklische Gruppe ist.