Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Bokowski
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan
Dr. Lars Schewe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008
12. November 2007

5. Übungsblatt zur „Einführung in die Algebra für M, MCS, LaG“

Gruppenübung

Aufgabe G15 (Berechnen der Linksnebenklassen)
Es ist $H := (0, \infty)$ eine Untergruppe der Gruppe $(\mathbb{R}^\times, \cdot, 1)$. Bestimme alle Linksnebenklassen von H in $\mathbb{R}^\times$. Wieviel verschiedene sind es?

Aufgabe G16 (Charakterisierungen von Normalteilern)
Es sei $(G, *, 1)$ eine Gruppe und N eine Untergruppe von G. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(a) N ist ein Normalteiler von G;

(b) $gN \subseteq Ng$ für alle $g \in G$;

(c) $gNg^{-1} \subseteq N$ für alle $g \in G$;

(d) $gNg^{-1} = N$ für alle $g \in G$.

Aufgabe G17 (Linksnebenklassen vs. Rechtsnebenklassen)
Es sei G eine endliche Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe.

(a) Der Index $[G : H]$ wurde definiert als die Zahl der Linksnebenklassen von H in G. Zeige, dass $[G : H]$ auch mit der Zahl der Rechtsnebenklassen von H in G übereinstimmt.
Hinweis: Wie könnte man einer Linksnebenklasse eine Rechtsnebenklasse zuordnen?

(b) Zeige, dass H ein Normalteiler von G ist, wenn $[G : H] = 2$.

Aufgabe G18 (Eigenschaften von Quotientengruppen)
Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G.

(a) Zeige: G abelsch $\implies$ G/N abelsch.

(b) Zeige: G zyklisch $\implies$ G/N zyklisch.

(c) Finde ein gemeinsames Gegenbeispiel für die Umkehrungen von (a) und (b).
Hinweis: Welche ist die kleinste endliche nicht-abelsche Gruppe?

Hausübung

Aufgabe H17 (Normalteiler unter Gruppenhomomorphismen) (1+1 Punkte)

Es sei $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige:

(a) Ist N ein Normalteiler von H, so ist $\phi^{-1}(N)$ ein Normalteiler von G.

(b) Ist ϕ surjektiv und ist N ein Normalteiler von G, so ist $\phi(N)$ ein Normalteiler von H.

Aufgabe H18 (Neue Normalteiler aus alten) (1+1+1 Punkte)

Es sei G eine Gruppe.

(a) Zeige: Ist H eine Untergruppe von G und N ein Normalteiler von G, so ist $H \cap N$ ein Normalteiler von H. Zeige weiter, dass das Komplexprodukt HN eine Untergruppe von G ist, und dass $HN = NH$ gilt.

(b) Zeige: Ist $(N_i)_{i\in I}$ eine Familie von Normalteilern N_i von G, so ist auch $\bigcap_{i\in I} N_i$ ein Normalteiler von G (vgl. Aufgabe H8).

(c) Zeige: Sind N_1 und N_2 Normalteiler von G, so ist auch das Komplexprodukt N_1N_2 ein Normalteiler von G.

Aufgabe H19 (Selbstinverse Elemente in endlichen Gruppen) (2 Punkte)

Es sei $(G, *, 1)$ eine endliche Gruppe gerader Ordnung. Zeige, dass es ein Element $a \neq 1$ in G gibt mit $a^{-1} = a$. Kann diese Schlussfolgerung auch für eine Gruppe ungerader Ordnung erfüllt sein ?