Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Bokowski
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan
Dr. Lars Schewe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Wintersemester 2007/2008
5. November 2007

4. Übungsblatt zur „Einführung in die Algebra für M, MCS, LaG“

Gruppenübung

Aufgabe G11 (Gruppenhomomorphismen? Gruppenisomorphismen?)

Entscheide, ob die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind. Welche sind sogar Gruppenisomorphismen?

(a) $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$, $x \mapsto e^x$ von $(\mathbb{R}, +, 0)$ in die Gruppe $(\mathbb{R}^\times, \cdot, 1)$.

(b) $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $x \mapsto e^x$ von $(\mathbb{R}, +, 0)$ in die Gruppe $((0, \infty), \cdot, 1)$.

(c) Die Betragsfunktion $z \mapsto |z|$ von $(\mathbb{C}^\times, \cdot, 1)$ in die Gruppe $((0, \infty), \cdot, 1)$.

(d) Die Inversion $i : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$, wobei $(G, *, 1)$ eine beliebige Gruppe ist.

Aufgabe G12 (Automorphismen von $\mathbb{Z}$)

(a) Es sei $\phi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und $g \in G$. Zeige, dass $\phi(g^n) = \phi(g)^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Bestimme alle Automorphismen der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Aufgabe G13 (Übertragung von Eigenschaften auf isomorphe Gruppen)

Es seien $(G, *, 1)$ und $(H, *, 1)$ Gruppen und $\phi\colon G \to H$ ein Isomorphismus. Zeige:

(a) Ist G endlich, so auch H.

(b) Ist G abzählbar, so auch H.

(c) Ist G abelsch, so auch H.

(d) Ist G zyklisch, so auch H.

(e) Gibt es zu allen Elementen $x \neq 1$ und $y \neq 1$ in G Zahlen $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $x^n = y^m$, so hat auch H die entsprechende Eigenschaft.

Aufgabe G14 (Was kann zwei Gruppen unterscheiden?)

Zeige, dass die folgenden Gruppen nicht isomorph sind:

(a) Die Gruppe C_n der n-ten Einheitswurzeln und die Gruppe C_m der m-ten für $n \neq m$.

(b) $(\mathbb{R}, +, 0)$ und $(\mathbb{R}^\times, \cdot, 1)$.

(c) Die additiven Gruppen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$.

(d) Die additiven Gruppen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}^2$.

Hausübung

Aufgabe H12 (Was kann zwei Gruppen unterscheiden?) (1+1+1+1 Punkte)

Zeige, dass die folgenden Gruppen nicht isomorph sind:

(a) $(\mathbb{R}, +, 0)$ und $(\mathbb{Q}, +, 0)$.

(b) $(\mathbb{R}, +, 0)$ und $(\mathbb{S}, \cdot, 1)$, wobei $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$.

(c) $(\mathbb{Q}, +, 0)$ und $(\mathbb{Q}^2, +, 0)$.

(d) Die Diedergruppe D_4 aus Aufgabe G10(b) und die Gruppe C_8 der 8-ten Einheitswurzeln.

Aufgabe H13 (Wann ist die Inversion ein Automorphismus?) (2 Punkte)

Es sei G eine Gruppe. Bestimme eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Inversion $i \colon G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ ein Homomorphismus ist. Beachte, dass wegen der Bijektivität und des Abbildens in sich selber i in diesem Fall schon ein Automorphismus wäre.

Aufgabe H14 (Homomorphes Bild einer endlichen Gruppe in $\mathbb{Z}$) (2 Punkte)

Es sei $(G, *, 1)$ eine endliche Gruppe und $\phi \colon G \to \mathbb{Z}$ ein Gruppenhomomorphismus in die additive Gruppe $(\mathbb{Z}, +, 0)$. Zeige, dass $\phi(g) = 0$ für alle $g \in G$.
Hinweis: Aufgabe H5(c).

Aufgabe H15 (Existenz eines Homomorphismus') (2 Punkte)

Gegeben seien eine Gruppe G und Elemente $g, h \in G$. Wann existiert ein Gruppenhomomorphismus

$$\phi \colon \mathbb{Z}^2 \to G \quad \text{mit} \quad \phi(1,0) = g \quad \text{und} \quad \phi(0,1) = h\,,$$

d.h. welche Bedingung müssen die beiden Elemente erfüllen?

Aufgabe H16 (Multiplikative Gruppen endlicher Körper sind zyklisch) (2+1 Punkte)

(a) Zeige: Enthält eine abelsche Gruppe $(G, \cdot, 1)$ Elemente der Ordnung $m, n \in \mathbb{N}$, so enthält sie auch ein Element der Ordnung $k = \mathrm{kgV}(m, n)$.

Hinweis: Betrachte zunächst den Fall $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.

(b) Sei $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper. Zeige: Jede endliche Untergruppe G von $(K \backslash \{0\}, \cdot, 1)$ ist zyklisch. Insbesondere sind also die multiplikativen Gruppen endlicher Körper immer zyklisch.