Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Bokowski
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan
Dr. Lars Schewe

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008
29. Oktober 2007

3. Übungsblatt zur „Einführung in die Algebra für M, MCS, LaG“

Gruppenübung

Aufgabe G8 (Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +, 0)$)
Es sei $H \subseteq \mathbb{Z}$ eine Untergruppe. Zeige, dass ein $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existiert mit

$$H = m\mathbb{Z} := \{mn \colon n \in \mathbb{Z}\}.$$

Hinweis: Für $H \neq \{0\}$ betrachte $m := \min\{n \in H \colon n > 0\}$.

Aufgabe G9 (Eine von zwei vertauschenden Elementen erzeugte Gruppe)
Es sei G eine Gruppe, welche von zwei Elementen $a, b \in G$ erzeugt wird, die miteinander vertauschen:

$$ab = ba.$$

(a) Zeige, dass $G = \{a^i b^j \colon i, j \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Zeige, dass G abelsch ist.

Aufgabe G10 (Eine andere von zwei Elementen erzeugte Gruppe: die Diedergruppe D_4)

(a) Eine Gruppe G werde von zwei Elementen $a, b \in G$ erzeugt, welche die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$a^4 = b^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad ab = ba^3\,. \tag{1}$$

Zeige, dass sich jedes Element von G schreiben lässt in der Form

$$a^i b^j \quad \text{mit } i \in \{0,1,2,3\} \text{ und } j \in \{0,1\}\,.$$

Folglich hat G höchstens 8 Elemente. Wieviel Elemente hat G mindestens ?

(b) Zeige, dass die Matrizen

$$a := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Relationen (1) erfüllen, und dass die von ihnen erzeugte Untergruppe

$$D_4 := \langle a, b \rangle \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

die Ordnung 8 hat.

(c) In Teil (b) ist die lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto ax$ eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ um den Ursprung. Beschreibe analog in geometrischer Sprache die den Elementen $g \in D_4$ entsprechenden linearen Abbildungen. Zeige, dass die Elemente von D_4 genau denjenigen Automorphismen ϕ des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ entsprechen, welche das Quadrat

$$Q := [-1,1] \times [-1,1] \ \subseteq \ \mathbb{R}^2$$

bijektiv auf sich selbst abbilden. Wie lässt sich der Name „Diedergruppe" erklären?
Hinweis: Ohne Beweis darf benutzt werden, dass jedes $\phi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ mit $\phi(Q) = Q$ die Menge der Ecken des Quadrats Q bijektiv auf sich abbildet.

Hausübung

Aufgabe H8 (Schnitte von Untergruppen) (2 Punkte)

Es sei G eine Gruppe und $(H_j)_{j\in J}$ eine Familie von Untergruppen von G. Zeige, dass

$$H := \bigcap_{j\in J} H_j := \{g \in G \colon (\forall j \in J)\ g \in H_j\}$$

eine Untergruppe von G ist. Was ist H im Falle $J = \emptyset$?

Aufgabe H9 (Automorphismengruppe einer Gruppe) (2 Punkte)

Es sei $(G, *, 1)$ eine Gruppe. Zeige, dass die Menge $\mathrm{Aut}(G)$ aller Automorphismen von G eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_G ist.

Aufgabe H10 (Additive Darstellung des ggT; Erzeuger zyklischer Gruppen) (1+1 Punkte)

(a) Die Zahlen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ seien nicht beide 0. Zeige (Skript!), dass k_1 und k_2 genau dann teilerfremd sind (also den größten gemeinsamen Teiler 1 haben), wenn es $a, b \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$ak_1 \ + \ bk_2 \ = \ 1.$$

(b) Gegeben $n \in \mathbb{N}$ sei $C_n := \{z \in \mathbb{C} \colon z^n = 1\}$ die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln. Für welche Zahlen $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ erzeugt die n-te Einheitswurzel

$$\zeta := e^{\frac{2\pi i k}{n}}$$

die Gruppe C_n?

Aufgabe H11 (Untergruppen zyklischer Gruppen) (1+1+1+1 Punkte)

Es sei G eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung n und g ein Erzeuger von G.

(a) Zeige, dass $G = \{g^j : j = 0, 1, \ldots, n-1\}$ und $g^n = 1$.

(b) Es sei $k \in \mathbb{N}$ ein Teiler von n und $m := \frac{n}{k}$. Zeige, dass

$$H_k := \left\{g^{jm} : j \in \{0, \ldots, k-1\}\right\}$$

eine Untergruppe von G und von der Ordnung k ist.

(c) Es sei nun H eine Untergruppe von G. Zeige, dass $H = H_k$ für einen Teiler k von n.
Hinweis: Setze $m := \min\{j \in \mathbb{N} : g^j \in H\}$. Zeige, dass $H = \langle g^m \rangle$, indem Du $g^j \in H$ für ein $j \in \mathbb{Z} \setminus m\mathbb{Z}$ annimst und aus dieser Annahme einen Widerspruch zur Minimalität von m herbeiführst. Dieses Argument zeigt übrigens auch, dass $n \in \mathbb{Z}m$, d.h. m teilt n. Setze nun $k := \frac{n}{m}$.

(d) Zeige, dass k in (c) genau die Ordnung von H ist. Schließe, dass G für jeden Teiler k von $n = |G|$ genau eine Untergruppe der Ordnung k besitzt.