Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Bokowski
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan
Dr. Lars Schewe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008
12. Oktober 2007

2. Übungsblatt zur „Einführung in die Algebra für M, MCS, LaG“

Gruppenübung

Der zentrale Begriff der Veranstaltung „Einführung in die Algebra“ ist jener der *Gruppe*. Zum einen spielen Gruppen als Beschreibung von Symmetrien in nahezu allen Gebieten der Mathematik und in Anwendungen in der Physik und Chemie eine große Rolle. Zum anderen wird mit ihnen vom Rechnen mit konkreten Zahlen abstrahiert, um allgemeinere Aussagen zu beweisen. Die Erweiterung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die Erweiterung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind von dem Gedanken geleitet, Gruppenstrukturen mit den Operationen $+$ und $\cdot$ zu etablieren.

Aufgabe G4 (Was ist eine Gruppe?)

(a) Wie lautet die vollständige Definition einer Gruppe?

(b) Was ist Definition einer Untergruppe einer gegebenen Gruppe?

(c) Beweise, dass die folgenden drei Aussagen für eine Teilmenge $H \subseteq G$ einer Gruppe $(G, \cdot, 1)$ äquivalent sind:

i. H ist eine Untergruppe.

ii. $1 \in H$ und $x^{-1} \cdot y \in H$ für alle $x, y \in H$.

iii. $H \neq \emptyset$ und $x^{-1} \cdot y \in H$ für alle $x, y \in H$.

(d) Gib eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ an, die mit der Addition $+$ eine Gruppe bildet und eine andere unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$, die mit der Multiplikation $\cdot$ eine Gruppe bildet.

Aufgabe G5 (Prüfen der Gruppenaxiome)

Wir definieren eine Abbildung $*\colon\ ]-1,1[\ \times\ ]-1,1[\ \to \mathbb{R}$ durch

$$r * s := \frac{r+s}{1+rs} \qquad \text{für } r, s \in\ ]-1,1[\,,$$

unter Benutzung der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$. Zeige, dass hier stets $r * s \in\ ]-1,1[$ gilt. Ist $(\,]-1,1[, *, 0)$ eine Gruppe?

Aufgabe G6 (Untergruppe oder nicht?)

Welche der folgenden Mengen sind Untergruppen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \{\, A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$?

$$\begin{aligned} H_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}; \quad H_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^{\times}, b \in \mathbb{R} \right\}; \\ H_3 &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

Aufgabe G7 (Beispiele von Untergruppen)

(a) Es sei X eine unendliche Menge und

$$S_{X,\,\mathrm{fin}} := \{\phi \in S_X \colon \text{die Menge } \{x \in X \colon \phi(x) \neq x\} \text{ ist endlich}\} \;.$$

Zeige, dass $S_{X,\,\mathrm{fin}}$ eine Untergruppe der Gruppe S_X aller Permutationen von X ist.

(b) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeige, dass die Menge

$$\mathrm{Aff}(V) := \{\phi \in S_V \colon (\exists \phi_L \in \mathrm{GL}(V))(\exists v \in V)(\forall x \in V)\; \phi(x) = \phi_L(x) + v\}$$

der invertierbaren affinen Abbildungen eine Untergruppe von S_V ist.

(c) Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die Menge

$$\mathrm{Iso}(M, d) := \{\phi \in S_M \colon (\forall x, y \in M)\; d(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y)\}$$

aller bijektiven Isometrien von (M, d) eine Untergruppe von S_M ist.

Hausübung

Aufgabe H4 (Untergruppe oder nicht?) (1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind Untergruppen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$?

$$\begin{aligned} H_4 &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \colon a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^{\times} \right\} \;; \quad H_5 := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \colon \det A > 0\} \;; \\ H_6 &:= \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \colon \mathrm{Spur}\, A = 0\} \;? \end{aligned}$$

Aufgabe H5 (Gruppen endlicher Ordnung) (1+1+1 Punkte)

Es sei G eine Gruppe.

(a) Zeige: Sind a, b, c Elemente von G mit $ab = ac$, so ist $b = c$.

(b) Es sei x ein Element von G derart, dass $x^n = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es dann ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $x^m = x^{-1}$.

(c) G sei endlich. Zeige, dass es zu jedem $x \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 1$ gibt.

Aufgabe H6 (Untergruppen endlicher Gruppen) (1+1 Punkte)

(a) Es sei G eine *endliche* Gruppe. Beweise, dass die folgenden zwei Aussagen für eine Teilmenge $H \subseteq G$ äquivalent sind:

i. H ist eine Untergruppe.

ii. $H \neq \emptyset$ und $x \cdot y \in H$ für alle $x, y \in H$.

(b) Finde eine nicht-leere, unter der Gruppenmultiplikation abgeschlossene Teilmenge H einer geeigneten *unendlichen* Gruppe G derart, dass H *keine* Untergruppe von G ist.

Aufgabe H7 (Untergruppen von Permutationsgruppen) (1+1 Punkte)

Es sei X eine Menge und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge von X.

(a) Zeige, dass $U := \{\phi \in S_X \colon \phi(Y) = Y\}$ eine Untergruppe von S_X ist.

(b) Zeige durch ein Beispiel, dass $H := \{\phi \in S_X \colon \phi(Y) \subseteq Y\}$ keine Untergruppe von S_X zu sein braucht.

Bemerkung: Wir werden später sehen, dass jede endliche Gruppe eine Untergruppe einer endlichen Permutationsgruppe ist.