Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Bokowski
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan
Dr. Lars Schewe

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008
12. Oktober 2007

1. Übungsblatt zur „Einführung in die Algebra für M, MCS, LaG“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Fragen aus der Linearen Algebra)

Antworte auf die folgenden Fragen so kurz wie möglich und so ausführlich wie nötig, am besten mit mathematischen Symbolen.

(a) Was ist eine Gerade im $\mathbb{R}^n$?

(b) Was ist der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$?

(c) Was ist der Unterschied zwischen einer reellen $m \times n$-Matrix und einer linearen Abbildung vom $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$?

(d) Welche 2×2-Matrizen entsprechen den linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^2$ in sich, die Volumen und Winkel erhalten? Was gilt zusätzlich, wenn auch die Orientierung erhalten werden soll?

(e) Welche reellen und welche komplexen Eigenwerte kann eine reelle orthogonale $n \times n$-Matrix haben und welche Determinante?

Aufgabe G2 (Äquivalenzrelationen und Partitionen I)

Eine *Partition von X* ist eine Menge $P \subseteq \mathfrak{P}(X)$ paarweise disjunkter, nichtleerer Teilmengen von X, mit Vereinigung X. Eine *Äquivalenzrelation* $\sim$ auf einer Menge X ist eine *reflexive*, *transitive* und *symmetrische* Relation auf X, das heißt:

- Für alle $x \in X$ ist $x \sim x$.
- Für alle $x, y \in X$ folgt aus $x \sim y$ schon $y \sim x$.
- Für alle $x, y, z \in X$ folgt aus $x \sim y$ und $y \sim z$ schon $x \sim z$.

Gegeben $x \in X$ heißt $[x] := \{y \in X | y \sim x\}$ die *Äquivalenzklasse von x*.

(a) Zeige: Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X, so ist die Menge

$$X/_{\sim} := \{[x] : x \in X\}$$

der Äquivalenzklassen eine Partition von X.

(b) Ist P eine Partition von X, so schreibe $x \sim_P y$ für $x, y \in X$ genau dann, wenn ein $A \in P$ existiert mit $x, y \in A$. Zeige, dass $\sim_P$ eine Äquivalenzrelation auf X ist.

(c) Sei $X := \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \backslash \{0\})$ und definiere auf X die Relation $\sim$ durch

$$(a, b) \sim (c, d) \quad :\Longleftrightarrow \quad ad = bc.$$

i. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
ii. Gib drei verschiedene Elemente der Äquivalenzklasse $[(2,4)]$ an.
iii. Mit welcher dir bekannten Teilmenge von $\mathbb{R}$ kannst du $X/_\sim$ identifizieren und was entspricht in dieser Teilmenge einem Element $[(a,b)]$ in üblicher Schreibweise?
iv. Wie würdest du wohldefiniert und sinnvoll eine Multiplikation und eine Addition auf $X/_\sim$ definieren?

Aufgabe G3 (Symmetrien des Tetraeders I)
Schneide die Abwicklung des Tetraeders auf der letzten Seite aus, klebe ihn zusammen (achte also auf Klebelaschen!) und bestimme die Rotationssymmetrien des Tetraeders, das heißt die linearen bijektiven Selbstabbildungen, die ohne Spiegelungen auskommen. *Abwicklungen aller 5 regulären konvexen Polyeder stehen auf der Veranstaltungsseite zum Download bereit.*

Hausübung

Aufgabe H1 (Faktorisieren von Abbildungen) (1+1+1 Punkte)
Es sei $q : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Gegeben $x_1, x_2 \in X$ schreibe $x_1 \sim_q x_2$ genau dann, wenn $q(x_1) = q(x_2)$. Zeige, dass $\sim_q$ eine Äquivalenzrelation auf X ist.

(b) Sei q surjektiv und $f : X \to Z$ eine Abbildung. Zeige, dass es genau dann eine Abbildung $\overline{f} : Y \to Z$ mit $\overline{f} \circ q = f$ gibt, wenn $\sim_q \subseteq \sim_f$, das heißt wenn aus $q(x) = q(y)$ schon $f(x) = f(y)$ folgt. Zeige, dass $\overline{f}$, falls es existiert, eindeutig festgelegt ist. *Hinweis:* Wann ist $\overline{f}(q(x)) := f(x)$ wohldefiniert?
Man sagt in voriger Situation, dass f „über die Abbildung q faktorisiert“. Man nennt $\overline{f}$ die „von f auf Y induzierte Abbildung“ und schreibt kurz:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dashed, "\exists! \overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

(c) Zeige, dass jede unter Drehungen um den Ursprung invariante Funktion $f : \mathbb{C} \to Z$ nur von $|z|$ abhängt. Das bedeutet: Wenn $f(wz) = f(z)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$, dann gilt $f(z) = g(|z|)$ für eine Funktion $g : [0, \infty[\to Z$. Hierbei ist Z eine beliebige Menge. Versuche, Teil (b) anzuwenden. Was nimmt man für q?

Aufgabe H2 (Beispiel einer Äquivalenzrelation) (1+1 Punkte)
Sei $M \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0\}$ nicht leer und unter Multiplikation und Inversion abgeschlossen. Gegeben komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ schreibe $z_1 \sim z_2$ genau dann, wenn $z_2 = wz_1$ für ein $w \in M$.

(a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}$ ist.

(b) Bestimme für den Fall $M = \mathbb{S}^1 := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$ die Äquivalenzklassen von 0, 1 und 2. Skizziere sie in der Ebene und beschreibe die Menge $\mathbb{C}/_\sim$ aller Äquivalenzklassen in geometrischer Sprache.

Aufgabe H3 (Äquivalenzrelationen und Partitionen II) (1+1 Punkte)
Zeige, dass die Operationen aus Aufgabe G2 (a) und (b) zueinander invers sind: Es gilt

$$\sim_{(X/_\sim)} = \sim \quad \text{und} \quad X/_{\sim_P} = P$$

für jede Äquivalenzrelation $\sim$ und jede Partition P einer Menge X.