

## 1. Hausaufgabe Formale Grundlagen der Informatik I WS 2008/2009

**Abgabe:** Fr 21. November, in der Übung

**Geben Sie bitte ihren Namen und die Nummer ihrer Übungsgruppe an.**

### (H1.1) [Äquivalenzrelationen]

Sei  $\Sigma = \{a, b, c\}$  und sei  $\Sigma^*$  die Menge der Wörter über diesem Alphabet.

(i) Überprüfen Sie, ob die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen auf  $\Sigma^+$  sind.

$x \sim y \Leftrightarrow x$  und  $y$  haben ein nicht-leeres Teilwort gemeinsam

$x \sim y \Leftrightarrow x$  und  $y$  haben ein nicht-leeres Anfangsstück gemeinsam

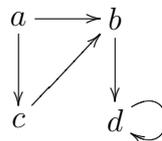
$x \sim y \Leftrightarrow x$  und  $y$  haben gleichviel  $a$ 's

(ii) Zeigen Sie, dass die folgende Relation auf  $\mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0}$  eine Äquivalenzrelation ist:

$$(k, l) \sim (m, n) \Leftrightarrow kn = ml.$$

### (H1.2) [Isomorphie]

In dieser Aufgabe betrachten wir gerichtete Graphen. Ein gerichteter Graph  $\mathcal{G} = (G, E)$  besteht aus einer endlichen Menge  $G$  von Knoten und einer Teilmenge  $E \subseteq G \times G$  von Kanten. Ein Beispiel:



$$G = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, b), (d, d)\}$$

- (i) Finden Sie zwei Graphen  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$ , so dass es einen bijektiven Homomorphismus  $f : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  gibt, ohne dass  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  isomorph sind.
- (ii) Kann es zwei Graphen  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  geben, so dass es bijektive Homomorphismen  $f : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  und  $g : \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_1$  gibt, ohne dass  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  isomorph sind? Begründen Sie Ihre Antwort!

**(H1.3) [Aussagenlogik]**

- (i) Geben Sie eine binäre Wahrheitsfunktion  $\square : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$  an, so dass sowohl  $\neg$  als auch  $\wedge$  sich aus  $\square$  definieren lassen. Geben Sie diese Definitionen explizit an und definieren Sie auch  $\vee, \rightarrow$  mit Hilfe von  $\square$ .
- (ii) Wir legen  $n + 1$  Bücher in  $n$  Schubfächer. Seien  $p_{ij}$  ( $1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq j \leq n$ ) aussagenlogische Variablen, die ausdrücken, dass das  $i$ -te Buch sich im  $j$ -ten Schubfach befindet. Schreiben Sie das Schubfachprinzip

„Wenn jedes Buch in ein Schubfach gelegt wird, dann gibt es ein Schubfach, das mehr als ein Buch enthält.“

formal auf, wobei Sie nur die aussagenlogischen Variablen  $p_{ij}$  und aussagenlogische Operatoren verwenden.

**(H1.4) [Induktion]**

- (i) Sei  $A(n)$  eine bestimmte Eigenschaft der natürlichen Zahlen. Beweisen Sie durch Wertverlaufsinduktion, dass

$$(\exists n \in \mathbb{N}) A(n) \rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) [A(n) \wedge (\forall k < n) \neg A(k)].$$

- (ii) Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Funktion. Beweisen Sie, dass

$$(\exists n \in \mathbb{N}) (\forall m \in \mathbb{N}) [f(n) \leq f(m)].$$