Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. November, 2008

1. Hausaufgabe Formale Grundlagen der Informatik I
WS 2008/2009

Abgabe: Fr 21. November, in der Übung

Geben Sie bitte ihren Namen und die Nummer ihrer Übungsgruppe an.

(H1.1) [Äquivalenzrelationen]

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und sei Σ^* die Menge der Wörter über diesem Alphabet.

(i) Überprüfen Sie, ob die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen auf Σ^+ sind.

$$\begin{array}{lcl} x \sim y & \Leftrightarrow & x \text{ und } y \text{ haben ein nicht-leeres Teilword gemeinsam} \\ x \sim y & \Leftrightarrow & x \text{ und } y \text{ haben ein nicht-leeres Anfangsstück gemeinsam} \\ x \sim y & \Leftrightarrow & x \text{ und } y \text{ haben gleichviel } a\text{'s} \end{array}$$

(ii) Zeigen Sie, dass die folgende Relation auf $\mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0}$ eine Äquivalenzrelation ist:

$$(k, l) \sim (m, n) \Leftrightarrow kn = ml.$$

(H1.2) [Isomorphie]

In dieser Aufgabe betrachten wir gerichtete Graphen. Ein gerichteter Graph $\mathcal{G} = (G, E)$ besteht aus einer endlichen Menge G von Knoten und einer Teilmenge $E \subseteq G \times G$ von Kanten. Ein Beispiel:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\ c \arrow[ur] & d \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{lcl} G & = & \{a, b, c, d\} \\ E & = & \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, b), (d, d)\} \end{array}$$

(i) Finden Sie zwei Graphen $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$, so dass es einen bijektiven Homomorphismus $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ gibt, ohne dass $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ isomorph sind.

(ii) Kann es zwei Graphen $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ geben, so dass es bijektive Homomorphismen $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ und $g : \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_1$ gibt, ohne dass $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ isomorph sind? Begründen Sie Ihre Antwort!

(H1.3) [Aussagenlogik]

(i) Geben Sie eine binäre Wahrheitsfunktion $\Box : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ an, so dass sowohl $\neg$ als auch $\wedge$ sich aus $\Box$ definieren lassen. Geben Sie diese Definitionen explizit an und definieren Sie auch $\vee, \to$ mit Hilfe von $\Box$.

(ii) Wir legen $n+1$ Bücher in n Schubfächer. Seien p_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n+1, 1 \leqslant j \leqslant n)$ aussagenlogische Variablen, die ausdrücken, dass das i-te Buch sich im j-ten Schubfach befindet. Schreiben Sie das Schubfachprinzip

> „Wenn jedes Buch in ein Schubfach gelegt wird, dann gibt es ein Schubfach, das mehr als ein Buch enthält."

formal auf, wobei Sie nur die aussagenlogischen Variablen p_{ij} und aussagenlogische Operatoren verwenden.

(H1.4) [Induktion]

(i) Sei $A(n)$ eine bestimmte Eigenschaft der natürlichen Zahlen. Beweisen Sie durch Wertverlaufsinduktions, dass

$$(\exists n \in \mathbb{N})\, A(n) \to (\exists n \in \mathbb{N})\, [\, A(n) \wedge (\forall k < n)\, \neg A(k)\,].$$

(ii) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass

$$(\exists n \in \mathbb{N})\, (\forall m \in \mathbb{N})\, [f(n) \leqslant f(m)].$$