Fachbereich Mathematik
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
03.09.-14.09.2007
14.09.2007

10. Übungsblatt zur „Repetitorium zur Linearen Algebra"

Gruppenübung

Aufgabe G37 (Jordannormalform)
Bestimme jeweils eine Jordannormalform und eine zugehörige Jordanbasis der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Es gilt $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^2(3-\lambda)^2$ und $\chi_B(\lambda) = (-1-\lambda)^4$.

Lösung: Für das charakteristische Polynom von A gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach der} \\ \text{3. Zeile}}}{=} (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach der} \\ \text{1. Zeile}}}{=} (2-\lambda)(3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda)^2.$$

Folglich besitzt A die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$, die jeweils die algebraische Vielfachheit zwei haben.
Für den Eigenraum zum Eigenwert λ_1 gilt

$$E_1 := \ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Folglich gibt es zum Eigenwert λ_1 zwei Jordanblöcke der Größe eins.

Für den Eigenraum zum Eigenwert λ_2 gilt

$$E_2 := \ker(A - \lambda_2 I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Folglich gibt es zum Eigenwert λ_2 einen Jordanblock der Größe zwei.
Zum Bestimmen des noch fehlenden Basisvektors des verallgemeinerten Eigenraums zum Eigenwert λ_2 ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$(A - \lambda_2 I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystem ist

$$\left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Damit ist

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von A und

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Jordannormalform.
Alternativ hätte auch das Verfahren aus der Vorlesung verwendet werden können. Dann hätte man nach der Berechnung von $\ker(A - \lambda_2 I)$

$$\ker(A - \lambda_2 I)^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

berechnet und festgestellt, daß $((0,1,0,0)^T, (1,0,0,1)^T)$ die fehlende Jordankette ist. ___

Für das charakteristische Polynom von B gilt

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{1. Zeile}}{\overset{\text{Entwicklung nach der}}{=}} (-1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{3. Zeile}}{\overset{\text{Entwicklung nach der}}{=}} (-1-\lambda)^2\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)^4$$

Folglich besitzt B den Eigenwert $\lambda_1 = -1$.
Da B nur einen Eigenwert besitzt, gibt es auch nur einen verallgemeinerten Eigenraum, womit $V^{\lambda_1} = \mathbb{R}^4$ gilt.
Mit dem Verfahren aus der Vorlesung kommt man nun sehr schnell zum Ziel, da das Berechnen von $\ker(B+I)^j$ entfallen kann. Als Basis des verallgemeinerten Eigenraums zur Eigenwert -1 kann zum Beispiel die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ gewählt werden. Daraus lassen sich nun Jordanketten bilden.
Es sei

$$v_3 := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 := (B+I)v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 := (B+I)v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_0 := (B+I)v_1 = 0$$

Aus $v_0 = 0$ folgt, daß v_1 ein Eigenvektor ist und v_3 ein Hauptvektor der Stufe 3. Daher ist (v_1, v_2, v_3) eine Jordankette.
Weiter sei

$$w_1 := e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_0 := (B+I)w_1 = 0$$

Aus $w_0 = 0$ folgt, daß w_1 ein Eigenvektor ist. Daher ist (w_1) eine Jordankette. Allerdings sind v_1 und w_1 linear abhängig, weshalb die Jordankette (w_1) gleich wieder verworfen werden kann.
Nun sei

$$u_2 := e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_1 := (B+I)u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_0 := (B+I)u_1 = 0$$

Aus $u_0 = 0$ folgt, daß u_1 ein Eigenvektor ist. Daher ist (u_1, u_2) eine Jordankette.
Die Vektoren $(v_1, v_2, v_3, u_1, u_2)$ bilden offensichtlich ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$. Allerdings bilden sie keine Basis. Deshalb müssen die Ketten noch verkürzt werden: Es gilt $v_1 - u_1 = 0$. Folglich kann die Kette (u_1, u_2) verkürzt werden. Es sei

$$\tilde{u}_1 := u_2 - v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $(\tilde{u}_1)$ eine Jordankette.
Da v_1 und $\tilde{u}_1$ linear unabhängig sind, sind auch $v_1, v_2, v_3, \tilde{u}_1$ linear unabhängig und daher

$$(v_1, v_2, v_3, \tilde{u}_1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von B und

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Jordannormalform.
Alternativ ist auch die folgende Rechnung möglich: Für den Eigenraum zum Eigenwert λ_1 gilt

$$E_1 := \ker(B - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Folglich gibt es zum Eigenwert λ_1 zwei Jordanblöcke.
Zum Bestimmen der noch fehlenden Basisvektoren des verallgemeinerten Eigenraums zum Eigenwert λ_1 ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$(B - \lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: v_1.$$

Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist

$$L_1 := \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir wählen einen Vektor $v_2 = (0,0,0,-\frac{1}{2}) \in L_1$ und lösen das Gleichungssystem

$$(B - \lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = v_2. \tag{1}$$

Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist

$$L_2 := \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Damit ist

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von A und

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Jordannormalform.
Wichtige Anmerkung: Bei der Wahl von v_2 hatten wir das Glück, daß das Gleichungssystem 1 eine Lösung hatte und den fehlenden Basisvektor lieferte. Für ein systematisches Suchen des fehlenden Basisvektors, hätte man das Gleichungssystem

$$(B - \lambda_2 I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

mit den Unbekannten $v \in \mathbb{R}^3$ und $s, t \in \mathbb{R}$ lösen können.