Fachbereich Mathematik
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

03.09.-14.09.2007
13.09.2007

9. Übungsblatt zur „Repetitorium zur Linearen Algebra“

Gruppenübung

Aufgabe G34 (Entartete Bilinearformen)

(a) Die Bilinearform $F(x, y) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $x^T Ay$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Gibt es einen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$, so daß für jedes $x \in U$ die Abbildung $f_x := F(x, .) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ identisch Null ist, d.h. $f_x(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$?
(Dann nennt man die Bilinearform entartet.)

(b) Sei jetzt $G(x, y) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x^T By$ mit $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Gibt es einen Unterraum U wie in a), d.h. so, daß $g_x(y) := G(x, y) \equiv 0$ für alle $x \in U$ ist?

Sei Q die G entsprechende quadratische Form $Q(x) := G(x, x)$. Für welche Unterräume U von $\mathbb{R}^2$ ist $Q_{|U} : U \to \mathbb{R}$ identisch Null, d.h. $q(u) = 0$ für alle $u \in U$?

Lösung:

(a) Genau dann ist $f_x := F(x, .) : \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ identisch Null, wenn x Eigenvektor von $A^T = A$ zum Eigenwert 0 ist.
Man sieht (1. + 2. = 3. Spalte), daß 0 Eigenwert von A ist und ($\mathrm{rg}(A) = 2$) dessen geometrische Vielfachheit eins. Der gesuchte Unterraum U ist der Eigenraum zum Eigenwert 0 und wird daher z.B. von $(1, 1, -1)^T$ erzeugt.

(b) Die G entsprechende Matrix B ist nichtsingulär, die Bilinearform also nicht entartet, bzw. es gibt keinen Unterraum mit der Eigenschaft aus a).
Zunächst führt man die Hauptachsentransformation durch. Die Eigenwerte von B sind -3 und 2, die neuen Koordinaten seien (entsprechend den jeweiligen Eigenvektoren von B) $y_1 = -2x_1 + x_2$ und $y_2 = x_1 + 2x_2$. Die Matrix der Bilinearform bzgl. der neuen Koordinaten ist daher

$$B' = S^T BS = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung $Q(x,x) = 0$ wird damit zu $3y_1^2 = 2y_2^2$. Die gesuchten Teilräume sind daher die Ursprungsgeraden $y_2 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}y_1$ bzw. wieder in den ursprünglichen Koordinaten
$x_1 + 2x_2 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}(-2x_1 + x_2)$. Das $+$ führt auf $(2 - \sqrt{\frac{3}{2}})x_2 = -2\sqrt{\frac{3}{2}}x_1 - x_1$ und schließlich auf $x_2 = -(13 + 5\sqrt{\frac{3}{2}})x_1$.

Im anderen Fall erhält man $x_2 = (5\sqrt{\frac{3}{2}} - 13)x_1$.

Aufgabe G35 (Quadratische Kurve)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{3}.$$

Von welchem Kurventyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T A x + b^T x + c = 0?$$

Skizziere die Lösungsmenge im ursprünglichen Koordinatensystem.

Lösung: Die Matrix A besitzt den Eigenwert 1 mit Eigenvektor $(1,1)^T$ und den Eigenwert 3 mit Eigenvektor $(-1,1)^T$. Seien $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ und $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$ die normierten Eigenvektoren. Dann ist

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Transformationsmatrix für den Wechsel zur Orthonormalbasis e_1, e_2. Sei $d = C^T b = (0, -4)$. In der neuen Basis (mit neuer Variablen y) lautet die Gleichung dann

$$(Cy)^T ACy + b^T Cy + c = 0$$

bzw.

$$y^T C^T ACy + b^T Cy + c = 0$$

oder ausgeschrieben

$$y_1^2 + 3y_2^2 - 4y_2 + \frac{1}{3} = 0.$$

Um das Linearglied $-4y_2$ zu beseitigen, führt man eine quadratische Ergänzung durch:

$$\begin{aligned} y_1^2 + 3\left(y_2^2 - \frac{4}{3}y_2\right) + \frac{1}{3} &= y_1^2 + 3\left(y_2^2 - \frac{4}{3}y_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \frac{1}{3} \\ &= y_1^2 + 3\left(y_2 - \frac{2}{3}\right)^2 - 1. \end{aligned}$$

Setzt man nun $z_1 := y_1$ und $z_2 := y_2 - \frac{2}{3}$, dann lautet die Gleichung in den neuen Variablen

$$z_1^2 + 3z_2^2 = 1.$$

Folglich ist die Lösungsmenge eine *Ellipse*. Bezüglich der z-Koordinaten liegt das Zentrum im Nullpunkt. Daher liegt es bezüglich der y-Koordinaten im Punkt $(0, \frac{2}{3})$ und der x-Koordinaten im Punkt $(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$. Die Vektoren e_1 und e_2 geben die Richtung der Achsen der Ellipse an. Die Halbachsen haben die Länge 1 und $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Aufgabe G36 (Kegelschnitt)

Sei $K = \{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1^2+x_2^2-x_3^2 = 0\}$ und $E = \{(x_1, x_2, x_3)^T \mid 2x_1+x_2+x_3 = 1\}$. Dann ist K ein Doppelkegel und E eine Ebene. Von welchen Kurventyp ist die Schnittmenge $K \cap E$?

Lösung: Alle $(x_1, x_2, x_3) \in K \cap E$ erfüllen die Gleichungen

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad \text{und} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Eliminiert man die Variable x_3, dann erhält man die Gleichung

$$3x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2 + 1 = 0.$$

Mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

läßt sich die Gleichung auch in der Form

$$x^T Ax + b^T x + 1 = 0$$

schreiben.

Die Matrix A hat die Eigenwerte 4 und -1 mit den normierten Eigenvektoren $\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^T$ und $\frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)^T$. In den neuen Koordinaten y_1, y_2 bezüglich der Basis aus Eigenvektoren lautet die Gleichung

$$4y_1^2 - y_2^2 - 2\sqrt{5}y_1 + 1 = 0.$$

Mittels quadratischer Ergänzung erhält man

$$4y_1^2 - 2\sqrt{5}y_1 - y_2^2 + 1 = 4\left(y_1^2 - \frac{\sqrt{5}}{2}y_1 + \frac{5}{16}\right) - \frac{5}{4} - y_2^2 + 1 = 4\left(y_1 - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 - y_2^2 - \frac{1}{4}.$$

In den neuen Koordinaten $z_1 := y_1 - \frac{\sqrt{5}}{4}$, $z_2 := y_2$ lautet die Gleichung

$$4z_1^2 - z_2^2 - \frac{1}{4} = 0$$

bzw.

$$16z_1^2 - 4z_2^2 = 1.$$

Daraus läßt sich ablesen, daß es sich bei der Schnittmenge um eine *Hyperbel* handelt.
Anmerkung: Je nachdem welche Variable am Anfang eliminiert wird, erhält man unterschiedliche Eigenwerte und Eigenvektoren. Das hat aber nur einen Einfluß auf die Kompliziertheit der Rechnung und nicht auf das Endergebnis. Der Kurventyp ist immer derselbe.