Fachbereich Mathematik
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
03.09.-14.09.2007
12.09.2007

8. Übungsblatt zur „Repetitorium zur Linearen Algebra“

Gruppenübung

Aufgabe G29 (Darstellung von Matrizen)
Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{C})$ dargestellt werden kann als

a) die Summe einer reellen und einer imaginären Matrix.

b) die Summe einer symmetrischen und schiefsymmetrischen Matrix.

c) die Summe einer hermiteschen und schiefhermiteschen Matrix.

Lösung: Es gilt:

a) Summe einer reellen und einer rein imaginären Matrix:

$$A = \frac{1}{2}(A + \overline{A}) + \frac{1}{2}(A - \overline{A})$$

b) Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

c) Summe einer hermiteschen und einer schiefhermiteschen Matrix:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*)$$

Aufgabe G30 (Proposition 9.1.3)
Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$ und eine $n \times n$ Matrix A über $\mathbb{C}$

$$\langle v, Aw \rangle = \langle A^* v, w \rangle$$

gilt.

Lösung: $\langle v, Aw \rangle = v^* A w = v^* A^{**} w = (A^* v)^* w = \langle A^* v, w \rangle$.

Aufgabe G31 (Proposition 9.1.5)
Ist A eine normale $n \times n$ Matrix, so gilt

a) $A - \lambda E$ ist normal für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$.

b) $A' = Q^*AQ$ ist normal für jede unitäre Matrix Q.

Lösung:

a)

$$(A-\lambda E)(A-\lambda E)^* = (A-\lambda E)(A^* - \overline{\lambda}E) = AA^* - \lambda A^* - \overline{\lambda}A + \lambda\overline{\lambda}E$$
$$(A-\lambda E)^*(A-\lambda E) = (A^* - \overline{\lambda}E)(A-\lambda E) = A^*A - \overline{\lambda}A - \lambda A^* + \overline{\lambda}\lambda E$$

und diese Ausdrücke sind gleich, da $AA^* = A^*A$ gilt (A ist normal).

b) Analog gilt

$$(Q^*AQ)(Q^*AQ)^* = (Q^*A\underbrace{Q)(Q^*}_{E}A^*Q^{**}) = Q^*AA^*Q$$
$$(Q^*AQ)^*(Q^*AQ) = (Q^*A^*Q^{**})(Q^*AQ) = Q^*A^*\underbrace{QQ^*}_{E}AQ = Q^*A^*AQ$$

Wegen $AA^* = A^*A$ sind die Ausdrücke Q^*AA^*Q und Q^*A^*AQ gleich.

Aufgabe G32 (Proposition 9.1.7)

Zeigen Sie, dass für eine normale Matrix A die Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind.

Lösung: Wir nehmen an, v und w seien Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten λ und μ, d.h. es gilt $Av = \lambda v$ und $Aw = \mu w$. Es folgt

$$\mu \cdot \langle v, w\rangle \overset{(\mathrm{B}_2)}{=} \langle v, \mu w\rangle = \langle v, Aw\rangle \overset{(9.1.3)}{=} \langle A^*v, w\rangle \overset{(9.1.6)}{=} \langle \overline{\lambda}v, w\rangle \overset{(\mathrm{B'}_1)}{=} \lambda \cdot \langle v, w\rangle$$

Aus $\mu \neq \lambda$ ergibt sich, dass $\langle v, w\rangle$ verschwindet. Also sind v und w orthogonal.

Aufgabe G33 (Proposition 9.2.2)

Zeigen Sie, dass eine hermitesche Matrix nur reelle Eigenwerte besitzt.

Lösung: Sei $A = A^*$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Dann gibt es einen nichtverschwindenden Vektor v mit

$$Av = \lambda v\,.$$

Aus 9.1.6 folgt $A^*v = \overline{\lambda}v$ und aus $A^* = A$ folgern wir $Av = \overline{\lambda}v$ und damit $\lambda v = \overline{\lambda}v$, was $\lambda = \overline{\lambda}$ impliziert. Dies führt auf $\lambda \in \mathbb{R}$.