Fachbereich Mathematik
D. Frisch

03.09.-14.09.2007
11.09.2007

7. Übungsblatt zur „Repetitorium zur Linearen Algebra“

Gruppenübung

Aufgabe G26 (Geometrische und algebraische Vielfachheit)
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, dass für jeden Eigenwert λ einer linearen Abbildung $\varphi \in \mathrm{End}(V,V)$ mit geometrischer Vielfachheit t und algebraischer Vielfachheit s gilt:

$$t \leq s$$

Lösung: Sei λ ein Eigenwert zu φ mit geometrischer Vielfachheit t. Dann gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_t$ des Eigenraumes von φ zum Eigenwert λ. Diese Basis können wir nach dem Basisergänzungssatz zu einer Basis $v_1, \ldots, v_t, v_{t+1}, \ldots, v_n$ von V ergänzen. Bzgl. dieser Basis hat φ die Matrixdarstellung

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir die Matrix in dem schwarzen Kasten mit A', so ist das charakteristische Polynom von A

$$\chi_A(x) = \det(A - xE_n) = (\lambda - x)^t \det(A' - xE_{n-t}).$$

Damit hat das charakteristische Polynom mindestens t Nullstellen, d.h. $t \leq s$.

Aufgabe G27 (Diagonalisieren)

a) Diagonalisieren Sie die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
über $\mathbb{R}$.

b) Diagonalisieren Sie die Matrix
$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
über $\mathbb{R}$.

c) Diagonalisieren Sie die Matrix
$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
über $\mathbb{C}$.

Lösung:

a) Das charakteristische Polynom ist
$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 9.$$
Dieses hat die Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 4$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Die Transformationsmatrix lautet
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
und es ist
$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Das charakteristische Polynom von B ist
$$\chi_B(\lambda) = (1-\lambda)^2 + 1.$$
Nullsetzen liefert $(1-\lambda)^2 = -1$. Diese Gleichung hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung. Über $\mathbb{C}$ erhalten wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 1+i$ und $\lambda_2 = 1-i$ mit den Eigenvektoren
$$v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Die Transformationsmatrix lautet
$$S = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
und es ist
$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

c) Das charakteristische Polynom von C ist

$$\chi_C(\lambda) = (1-\lambda)^2.$$

Nullsetzen liefert $(1-\lambda)^2 = 0$. Diese Gleichung hat nur eine Lösung nämlich $\lambda = 1$. Wir bestimmen die Eigenvektoren. Es gilt

$$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (A - 1 \cdot E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Also die Gleichungen $2v_2 = 0$ und $0 = 0$. Hieraus folgt $v_2 = 0$ und v_1 beliebig, d.h. der Eigenraum zu $\lambda = 1$ ist 1-dimensional und damit ist C nicht diagonalisierbar.

Aufgabe G28 (Bedingungen für Diagonalisierbarkeit (7.2.13))

Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Hat eine $n \times n$ Matrix n verschiedene Eigenwerte, so ist diese diagonalisierbar.

b) Eine $n \times n$ Matrix ist genau dann über $\mathbb{K}$ diagonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom $\chi(\lambda)$ in ein Produkt von Linearfaktoren

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{s_r}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ zerlegt werden kann und falls für jeden Eigenwert λ_j die geometrische Vielfachheit t_j gleich der algebraischen Vielfachheit s_j ist.

Lösung:

a) Hat $\chi(\lambda)$ n verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so gibt es auch n Eigenvektoren, denn jeder Eigenwert hat mindestens einen Eigenvektor. Diese sind nach 7.2.7 lin. unabhängig und bilden somit eine Basis.

b) Ist $r = n$, so folgt die Aussage aus a). Sei also $r < n$. Wir betrachten die Eigenräume $U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_r}$ und deren geometrische Vielfachheiten $t_1, \ldots, t_r$. Wir wählen in jedem Eigenraum U_{λ_j} eine Basis $\mathcal{B}_j$, die dann aus t_j Vektoren besteht. Zusammen bilden diese Basen ein linear unabhängiges System $\mathcal{B}$ mit

$$t_1 + \cdots + t_r$$

Vektoren. Da in $\mathbb{K}^n$ jeder Eigenvektor von A zu einem Eigenraum U_{λ_j} gehört stellen wir fest:

$\mathbb{K}^n$ hat genau dann eine Basis aus Eigenvektoren, wenn

$$t_1 + \cdots + t_r = n$$

ist. Andererseits ist

$$n = s_1 + \cdots + s_r + \deg Q,$$

wobei Q das Polynom höchsten Grades ist, welches χ_A teilt und das keine Nullstellen mehr besitzt.

Zusammen ergibt sich nun also

$$t_1 + \cdots + t_r = n = s_1 + \cdots + s_r + \deg Q.$$

Da nach G25 $t_j \leq s_j$ gilt, ist dies genau dann der Fall, wenn $\deg Q = 0$ ist.