Fachbereich Mathematik
D. Frisch

03.09.-14.09.2007
10.09.2007

6. Übungsblatt zur „Repetitorium zur Linearen Algebra“

Gruppenübung

Aufgabe G23 (Geometrische Bedeutung der Ähnlichkeit von Matrizen)
Zeigen Sie, dass zwei Matrizen A und A' genau dann ähnlich sind, wenn sie dieselbe lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ auf einem n-dimensionalen Vektorraum V bzgl. zweier verschiedener Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ darstellen.

Lösung: Sind A und A' Matrizen einer linearen Abbildung $\varphi : V \to V$ bzgl. zweier Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ in V, so gibt es eine invertierbare Matrix S (die Transformationsmatrix), so dass $A' = S^{-1}AS$ (siehe 5.6.4), d.h. $A \approx A'$ gilt.
Umgekehrt sei $A \approx A'$. Sei $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ die lineare Abbildung mit der Matrix A bzgl. der Standardbasis $\mathcal{B}$. Nach Annahme gilt $A' = S^{-1}AS$ für eine invertierbare Matrix S. Die Zeilen $v_1, \dots, v_n$ von S bilden eine Basis $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{K}^n$. Die Matrix von φ bzgl. der Basis $\mathcal{B}'$ ist $A' = S^{-1}AS$ aufgrund der Transformationsformel (siehe 5.6.4). Also stellen A und A' dieselbe lineare Abbildung bzgl. der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ dar.

Aufgabe G24 (Matrizen von lin. Abbildungen bzgl. geeigneter Basen)
Betrachte in $\mathbb{R}^2$ die beiden Geraden g und h mit den Gleichungen:

$$g\colon x_1 + x_2 = 0$$
$$h\colon x_1 - 2x_2 = 0$$

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Projektion auf g, jedoch nicht die orthogonale Projektion, sondern die Projektion parallel zur Geraden h.
Finden Sie die Matrix A von φ bzgl. der Standardbasis $\mathcal{B} : e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung: Wählen wir einen Vektor e_1', der in Richtung von g und einen Vektor e_2', der in Richtung von h geht, spo hat die Matrix von φ bzgl. $\mathcal{B}'$ folgende Gestalt hat:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen in diesem Fall $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $e_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit der Transformationsformel in 6.1.4 ergibt sich $A = SA'S^{-1}$, wobei S die Transformationsmatrix ist. Hier gilt

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

und man berechnet

$$S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe G25 (Orthogonale Abbildungen)

Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

bzgl. der Standardbasis. Untersuchen Sie die Bilder der Standardbasisvektoren $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ und vermuten Sie, welche lineare Abbildung von A induziert wird.
Besttigen Sie ihre Annahme, indem Sie eine geeignete Basis wählen und die Matrix bzgl. dieser Basis aufstellen und zurücktransformieren.

Hinweis: Was ist das Skalarprodukt der Spalten von A?

Lösung: Das Skalarprodukt der Spalten von A ist 0, d.h. die Spalten bilden ein Orthogonalsystem und somit induziert A eine orthogonale Abbildung. Es bleiben also nur Drehungen und Spieglungen. Bestimmen wir nun die Bilder der Standardbasivektoren, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Zeichnen wir dies in ein Koordinatensystem ein, so sehen wir, dass eine Drehung ausscheidet, da eine Drehung die Orientierung von e_1 und e_2 erhält. Es muss also eine Spiegelung vorliegen. Da der Nullpunkt sich nicht ändert, muss es sich um eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden handeln (sonst wäre φ_A auch keine lineare Abbildung).

Die Gerade, an der gespiegelt wird ist die Winkelhalbierende zwischen dem Urbild- und dem Bildvektor, d.h. in unserem Fall

$$g = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Als Basis wählen wir nun
$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Bzgl. dieser Basis wird die lineare Abbildung durch die Matrix
$$[S]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
induziert. Die Transformationsmatrix von der Standardbasis in Basis $\mathcal{B}$ lautet
$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$
sodass
$$[S]_{\{e_1,e_2\}} = T[S]_{\mathcal{B}}T^{-1} = A$$
ist.