Fachbereich Mathematik
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

03.09.-14.09.2007
07.09.2007

5. Übungsblatt zur „Repetitorium zur Linearen Algebra“

Gruppenübung

Aufgabe G19 (Matrizen und lineare Abbildungen (5.5.9))
Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Seien $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{K})$ und $B \in \mathcal{M}(n \times p, \mathbb{K})$, dann gilt

$$\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}.$$

(b) Für lineare Abbildungen $\psi\colon \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ und $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ gilt

$$[\varphi \circ \psi] = [\varphi][\psi].$$

Lösung:

(a) $(\varphi_A \circ \varphi_B)(x) = \varphi_A(\varphi_B(x)) = \varphi_A(Bx) = A(Bx) = (AB)x = \varphi_{AB}(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$, also gilt $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.

(b) $[\varphi \circ \psi](x) = (\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = [\varphi]([\psi]x) = ([\varphi][\psi])x$ für alle $x \in \mathbb{K}^p$, also gilt $[\varphi \circ \psi] = [\varphi][\psi]$.

Aufgabe G20 (Isomorphismen und invertierbare Matrizen (5.5.10))
Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn die lineare Abbildung $\varphi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ein Isomorphismus ist; wenn dies der Fall ist, gilt

$$\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}.$$

(b) Eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $n = m$ gilt und die Matrix $[\varphi]$ von φ invertierbar ist; wenn dies der Fall ist, gilt $[\varphi^{-1}] = [\varphi]^{-1}$.

Lösung:

(a) Ist A invertierbar, folgt $AA^{-1} = E = A^{-1}A$. Also gilt $\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_E = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} = \varphi_E = \varphi_{A^{-1}A} = \varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}}$. Daraus folgt, dass φ_A bijektiv ist und dass $\varphi_{A^{-1}}$ die zugehörige Inverse ist.

Ist umgekehrt φ_A ein Isomorphismus, dann gibt es eine lineare Abbildung ψ, so dass $\varphi_A \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} = \psi \circ \varphi_A$ ist. Sei B die Matrix von ψ. Dann gilt $\psi = \varphi_B$ und damit $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} = \varphi_E = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} = \varphi_B \circ \varphi_A = \varphi_{BA}$. Daraus folgt aber $AB = E = BA$, d.h. dass A invertierbar ist.

(b) Ist φ ein Isomorphismus, dann ist $n = m$ nach 5.5.4 (4). Die inverse Abbildung ist ebenso linear und erfüllt die Beziehung $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} = \varphi^{-1} \circ \varphi$. Also folgt $[\varphi][\varphi^{-1}] = [\varphi \circ \varphi^{-1}] = [\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}] = [\varphi^{-1} \circ \varphi] = [\varphi^{-1}][\varphi]$.

Damit ist die Matrix $[\varphi]$ invertierbar mit der Inversen $[\varphi^{-1}]$. Ist umgekehrt $m = n$ und $[\varphi]$ invertierbar, so folgt $[\varphi][\varphi]^{-1} = E = [\varphi]^{-1}[\varphi]$. Also gilt $\varphi_{[\varphi][\varphi]^{-1}} = \varphi_{[\varphi]} \circ \varphi_{[\varphi]^{-1}} = \varphi_E = \varphi_{[\varphi]^{-1}[\varphi]} = \varphi_{[\varphi^{-1}][\varphi]} = \varphi_{[\varphi^{-1}]} \circ \varphi_{[\varphi]}$.

Insgesamt hat φ eine Inverse und ist bijektiv. □

Aufgabe G21 (Matrizen von Projektionen)

Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektion auf den Unteraum $U \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$U := \mathrm{lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie eine Matrix, welche diese Abbildung induziert.

Lösung: Wir ergänzen die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer Basis. Da die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Ebene aufspannen, finden wir einen Vektor v, der senkrecht auf dieser Ebenen steht. Dieser bildet mit den beiden anderen eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Bzgl. dieser Basis hat die Abbildung φ die Matrix

$$\varphi_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

denn es ist

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \text{und } \varphi(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G22 (Proposition 5.7.2)

Angenommen, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bilden eine Orthonormalbasis von V. Dann ist eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ genau dann orthogonal [unitär], wenn $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_n)$ ebenfalls eine Orthonormalbasis von V ist.

Lösung: Da $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis ist, gilt $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle i, j. Ist φ orthogonal [unitär], so folgt per definitionem $\langle \varphi(v_i), \varphi(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$; damit ist $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_n)$ ebenfalls eine Orthonormalbasis.
Umgekehrt sei $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_n)$ eine Orthonormalbasis. Es folgt in diesem Fall $\langle \varphi(v_i), \varphi(v_j)\rangle = \delta_{ij}$. Wir zeigen, dass die Abbildung φ orthogonal [unitär] ist: Für beliebiges $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ und $w = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$ gilt folgende Rechnung (siehe 4.3.3):

$$\begin{aligned}\langle \varphi(v), \varphi(w)\rangle &= \langle \varphi(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i), \varphi(\sum_{j=1}^n \beta_j v_j)\rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(v_i), \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi(v_j)\rangle \\ &= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\beta_j \langle \varphi(v_i), \varphi(v_j)\rangle = \sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\beta_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i}\beta_i = \langle v, w\rangle.\end{aligned}$$