Fachbereich Mathematik
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

03.09.-14.09.2007
06.09.2007

4. Übungsblatt zur „Repetitorium zur Linearen Algebra“

Gruppenübung

Aufgabe G14 (Kriterium zur Injektivität (5.1.4))

Seien V und W Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann bijektiv, wenn $\ker \varphi = \{0\}$ ist.

Lösung:

"$\Rightarrow$" Da $\varphi(0) = 0$ ist, ist immer $0 \in \ker \varphi$. Sei nun $v \in \ker \varphi$ beliebig. Dann ist $\varphi(v) = 0$, d.h. $\varphi(v) = \varphi(0)$. Ist φ injektiv, so folgt $v = 0$, d.h. $\ker \varphi = \{0\}$

"$\Leftarrow$" Sei nun $\ker \varphi = \{0\}$. Wir nehmen an, dass φ nicht injektiv ist, d.h. es gibt Vektoren $v, w \in V$, sodass $\varphi(v) = \varphi(w)$ ist, d.h. $\varphi(v) - \varphi(w) = 0$. Aus der Linearität von φ ergibt sich dann $\varphi(v - w) = 0$, d.h. $v - w \in \ker \varphi$.
Also ist $v - w = 0$ oder $v = w$, d.h. φ injektiv.

Aufgabe G15 (Ergänzung 5.1.9)

Seien V und W Vektorräume. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Weiterhin seien $w_1, \ldots, w_n$ beliebige Vektoren in W. Dann gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi : V \to W$, sodass

$$\varphi(v_1) = w_1,\ \varphi(v_2) = w_2,\ \ldots\ ,\ \varphi(v_n) = w_n$$

gilt.

Lösung: Jedes $v \in V$ besitzt eine Darstellung als Linearkombination der Form

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

mit durch v eindeutig bestimmten Koeffizienten (Koordinaten) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Also können wir

$$\varphi(v) := \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_n w_n$$

definieren. Es gilt dann $\varphi(v_j) = w_j$ für $j = 1, \ldots, n$ (da $v_j = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{j-1} + 1 \cdot v_j + 0 \cdot v_{j+1} + \cdots + 0 \cdot v_n$ gilt, was $\varphi(v_j) = w_j$ zeigt). Die Linearität von φ kann leicht direkt mittels der Definition gezeigt werden. Also gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ mit der gewünschten Eigenschaft.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit von φ nehmen wir an, $\psi : V \to W$ sei eine andere lineare Abbildung, so dass $\psi(v_j) = w_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt. Für jedes $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ folgt dann

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \lambda_1 \psi(v_1) + \cdots + \lambda_n \psi(v_n) \\ &= \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n \\ &= \varphi(v). \end{aligned}$$

Also gilt $\psi = \varphi$.

Aufgabe G16 (Der Dualraum)

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Räume W und W^0 für

$$x + 2y = 0.$$

Identifizieren Sie hierbei ein Element $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto ax + by$ in $(\mathbb{R}^2)^*$ mit dem Element $(a, b) \in \mathbb{R}$.

Lösung: Per Definition ist W die Lösungsmenge der Gleichung

$$x + 2y = 0,$$

d.h. die Gerade $y = -\frac{1}{2}x$.

Der Teilraum W^0 des Dualraumes von $\mathbb{R}^2$ ist der Unterraum, der von der Linearform

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + 2y$$

aufgespannt wird. D.h. alle Linearformen $\lambda\varphi$, d.h. alle Abbildung

$$\lambda\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \lambda(x + 2y).$$

Wir identifizieren nun φ mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, dann ist

$$W^0 = \operatorname{lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe G17 (Lemma 5.3.4)

Ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, so gibt es zu jedem $v \in V$ mit $v \neq 0$ ein $\varphi \in V^*$, so dass $\varphi(v) \neq 0$ ist.

Lösung: Sei $v \neq 0$ ein Vektor aus V. Dann hat v ein Darstellung als Linearkombination:

$$v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$$

ebenso kann jedes Funktional $\varphi \in V^*$ dargestellt werden als Linearkombination

$$\varphi = \lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_n v_n^*.$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi(v) &= (\lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_n v_n^*)(v) \\
&= \lambda_1 v_1^*(v) + \cdots + \lambda_n v_n^*(v) \\
&= \lambda_1 v_1^*(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n) + \cdots + \lambda_n v_n^*(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n) \\
&= \lambda_1 \mu_1 v_1^*(v_1) + \cdots + \lambda_n \mu_n v_n^*(v_n) \\
&= \lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_n \mu_n.
\end{aligned}$$

Da $v \neq 0$ ist, ist o.B.d.A. $\mu_1 \neq 0$, d.h. wählen wir eine Linearform aus, bei der $\lambda_1 \neq 0$ ist und sonst alle $\lambda_i = 0$, so hat diese Linearform φ den Wert

$$\varphi(v) = \lambda_1 \mu_1 \neq 0.$$

Aufgabe G18 (Kanonischer Isomorphismus)

Zeigen Sie, dass im Falle $\mathbb{K}^n$ der kanonische Isomorphismus $\Psi : \mathbb{K}^n \to (\mathbb{K}^n)^*$ durch $e_i^* = e_i^T$ gegeben ist, d.h. zeigen Sie, dass

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0 & : \quad i \neq j \\ 1 & : \quad i = j \end{cases}$$

ist.

Lösung: Es ist

$$e_i^T \cdot e_j = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \underbrace{1}_{i} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \underbrace{1}_{j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D.h. die Linearform, welche durch e_i^T repräsentiert wird gibt den Wert eines Vektors an der i-ten Koordinate zurück. Damit ist klar, dass die gewünschten Eigenschaften erfüllt sind und nach G15 ist die Abbildung $e_i \mapsto e_i^* = e_i^T$ eindeutig.