Fachbereich Mathematik
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

03.09.-14.09.2007
05.09.2007

3. Übungsblatt zur „Repetitorium zur Linearen Algebra"

Gruppenübung

Aufgabe G9 (Dreiecksungleichung)

Sei V ein unitärer Vektorraum. Zeigen Sie, dass die durch das Skalarprodukt auf V via

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{C}, \;\; v \mapsto \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

induzierte Norm die Dreiecksungleichung erfüllt, d.h. dass für $v, w \in V$ gilt

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Lösung: Wir betrachten

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle + \underbrace{\langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle}}_{\in\mathbb{R}} + \langle w,w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle + 2\mathrm{Re}(\langle v,w\rangle) + \langle w,w\rangle \\
&\leq \langle v,v\rangle + 2|\langle v,w\rangle| + \langle w,w\rangle \\
&\overset{\text{CS-Ungl.}}{\leq} \langle v,v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w,w\rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\
&= (\|v\| + \|w\|)^2.
\end{aligned}$$

Wurzelziehen auf beiden Seiten liefert die Behauptung.

Aufgabe G10 ()

Sei V ein unitärer Vektorraum und $v, w \in V$.

a) Zeigen Sie, dass die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung genau dann mit Gleichheit erfüllt ist, wenn v und w linear abhängig sind.

b) Zeigen Sie, dass in der Dreiecksungleichung genau dann Gleichheit gilt, wenn $v = \alpha w$ für eine reele Zahl $\alpha > 0$ ist.

Lösung:

a) Betrachten wir uns den Beweis der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, so stellen wir zunächst fest, dass für $w = 0$ die Behauptung stimmt. Ist $w \neq 0$, so definieren wir wie im Beweis $\gamma := \frac{\langle w,v\rangle}{\langle w,w\rangle}$. Die einzige Ungleichung ist im ersten Schritt. Damit hier Gleichheit gilt, haben wir

$$0 = \langle v - \gamma w, v - \gamma w\rangle = \|v - \gamma w\|^2.$$

Damit folgt $v - \gamma w = 0$ oder $v = \gamma w$.

b) Wir betrachten den Beweis der Dreiecksungleichung. Hier taucht zuerst eine Ungleichung auf, wenn wir vom Realteil des Skalarproduktes zum Betrag des Skalarproduktes übergehen. Hier besteht Gleichheit, wenn $\langle v, w\rangle$ eine positive, relle Zahl ist. Die zweite Ungleichung taucht beim verwenden der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auf. Hier haben wir in a) gesehen, dass hier Gleichheit genau dann auftaucht, wenn $v = \lambda w$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ ist. Zusammen mit dem obigen erhalten wir

$$0 \geq \langle v, w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle.$$

Da $\langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ und $\langle w, w\rangle \in \mathbb{R}$ ist, muss auch $\lambda \in \mathbb{R}$ sein. Und da $\langle w, w\rangle \geq 0$ ist, muss auch $\lambda \geq 0$ gelten. Hierbei tritt $\lambda \neq 0$ auf, da in Wahrheit $0 < \langle v, w\rangle$ gilt, da v und w nicht senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe G11 (Orthogonalsystem)

Sie V ein unitärer Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$ ein Orthogonalsystem. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.

Lösung: Wir zeigen die Aussage mit Widerspruch. Wir nehmen an, es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ungleich 0, sodass $\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = 0$ ist. Dann gilt für jedes $i = 1, \ldots, n$

$$0 = \langle v_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle v_i, v_j\rangle = \lambda_i\langle v_i, v_i\rangle.$$

Da $\langle v_i, v_i\rangle \neq 0$ ist, folgt damit $\lambda_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ im Widerspruch zur Annahme.

Aufgabe G12 (Orthogonalprojektionen (4.3.5))

Sei V ein unitärer Vektorraum und $U \subset V$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum.

a) Zeigen Sie, dass für ein festes $v \in V$ und für alle $u \in U$

$$\|v - \pi(v)\| \leq \|v - u\|$$

gilt, d.h. $\pi(v)$ ist der Punkt in U, der den kürzesten Abstand zu v hat. Mit anderen Worten: $\pi(v)$ ist die beste Approximation von v durch U.

b) Zeigen Sie, dass durch

$$\pi' : V \to V, v \mapsto v - \pi(v)$$

die orthogonale Projektion auf $U^\perp$ definiert ist, indem Sie die folgenden Punkte zeigen:

(i) $\pi'(v) \in U^\perp$ für alle $v \in V$

(ii) $\pi'(u) = u$ für alle $u \in U$

(iii) $\pi'(\pi'(v)) = \pi'(v)$ für alle $v \in V$

Lösung:

a) Für jedes $u \in U$ gilt $\pi(v) - u \in U$, da U ein Untervektorraum ist. Weiterhin ist nach (6) $v - \pi(v) \in U^\perp$. Also sind $\pi(v) - u$ und $v - \pi(v)$ orthogonal zueinander. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \|v-u\|^2 &= \|(v-\pi(v)) + (\pi(v)-u)\|^2 \overset{\text{Pyth.}}{=} \|v-\pi(v)\|^2 + \|\pi(v)-u\|^2 \\ &\geq \|v-\pi(v)\|^2. \end{aligned}$$

b) (i) nach (6) ist $\pi'(v) = v - \pi(v) \in U^\perp$ für alle $v \in V$.

(ii) Sei $u \in U^\perp$. Dann ist nach (5) $u \in \ker(\pi)$, d.h.

$$\pi'(u) = u - \pi(u) = u.$$

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} \pi'(\pi'(v)) &= \pi'(v-\pi(v)) \\ &= v - \pi(v) - \pi(v - \pi(v)) \\ &\overset{(1)}{=} v - \pi(v) - \pi(v) + \pi(\pi(v)) \\ &\overset{(4)}{=} v - \pi(v) - \pi(v) + \pi(v) \\ &= v - \pi(v) = \pi'(v). \end{aligned}$$

Aufgabe G13 (Orthonormalbasis)

Sei $V := \mathcal{C}([-1,1])$ der Vektorraum aller reellwertigen stetigen Funktionen im Interval $[-1,1]$. Durch

$$\langle f,g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx, \quad \forall f,g \in V$$

statten wir V mit einem Skalarprodukt aus. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für den Untervektorraum $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, indem Sie von der kanonischen Basis ausgehen.

Lösung: Mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens erhalten wir durch Orthonormalisieren der kanonischen Basis $b_0 := (x \mapsto 1), b_1 := (x \mapsto x), b_2 := (x \mapsto x^2)$ die Vektoren:

$$\begin{aligned} u_0 &:= b_0 := (x \mapsto 1), & v_0 &:= \tfrac{u_0}{\|u_0\|} = \tfrac{u_0}{\sqrt{2}} = (x \mapsto \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \\ u_1 &:= b_1 - \langle v_0, b_1\rangle v_0 = (x \mapsto x), & v_1 &:= \tfrac{u_1}{\|u_1\|} = \tfrac{u_1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = (x \mapsto \sqrt{\tfrac{3}{2}}x) \\ u_2 &:= b_2 - \langle v_0, b_2\rangle v_0 - \langle v_1, b_2\rangle v_1 = (x \mapsto x^2 - \tfrac{1}{3}), & v_2 &:= \tfrac{u_2}{\|u_2\|} = \tfrac{u_2}{\sqrt{\frac{8}{45}}} = (x \mapsto \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{2}}(3x^2-1)) \end{aligned}$$