Fachbereich Mathematik
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

03.09.-14.09.2007
04.09.2007

2. Übungsblatt zur „Repetitorium zur Linearen Algebra“

Gruppenübung

Aufgabe G5 (Proposition 3.1.1)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass für $v_1, \ldots, v_n \in V$ die Menge

$$\operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_n)$$

ein Untervektorraum von V ist.

Lösung:

(U1) $0 = 0 \cdot v_1 \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_n)$.

(U2) Seien $v, w \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_n)$, d.h. es gibt $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$, sodass $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ und $w = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$ ist. Dann ist

$$v + w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) v_n.$$

Damit ist $v + w \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_n)$.

(U3) Für $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_n)$ und $\mu \in \mathbb{K}$ gilt

$$\mu v = \mu(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \mu\lambda_1 v_1 + \ldots + \mu\lambda_n v_n.$$

Und somit ist auch $\mu v \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_n)$.

Aufgabe G6 (Kriterium für lineare Unabhängigkeit (3.1.2))
Zeigen Sie, dass für $v_1, \ldots, v_n$ in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V folgende Aussagen äquivalent sind:

a) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

b) Die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

hat nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Lösung:

a) ⇒ b) Wir nehmen an, dass
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0,$$
jedoch mindestens ein $\lambda_j \neq 0$ ist. Sei o.B.d.A. $\lambda_1 \neq 0$. Dann gilt
$$v_1 = -\lambda_1^{-1}(\lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_v v_n) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$
Damit ist v_1 eine Linearkombination der restlichen Vektoren und somit sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig.

b) ⇒ a) Wir nehmen an, die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind linear abhängig. Dann ist o.B.d.A. v_1 eine Linearkombination der anderen Vektoren, d.h. es gibt Skalare $\mu_2, \ldots, \mu_n$ mit
$$v_1 = \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n.$$
Dann folgt
$$-v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n = 0.$$
Es können aber nicht alle Koeffizienten 0 sein, denn der erste ist -1.

Aufgabe G7 (Proposition 3.2.3)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V, der von m Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ aufgespannt wird. Dann ist jede Auswahl $w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}$ von $m+1$ Vektoren in diesem Untervektorraum linear abhängig.

Wir zeigen dieses Aussage mit vollständiger Induktion:

a) Induktionsanfang: Zeigen Sie die Behauptung für $m = 1$.

b) Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass m Vektoren in einem Untervektorraum der von $m-1$ Vektoren aufgespannt wird linear abhängig sind.

   Sei nun $w_1, \ldots, w_{m+1} \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_m)$. Dann können wir
$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & \alpha_{11} v_1 + \ldots + \alpha_{1m} v_m \\ \vdots & & \vdots \\ w_m & = & \alpha_{m1} v_1 + \ldots + \alpha_{mm} v_m \\ w_{m+1} & = & \alpha_{(m+1)1} v_1 + \ldots + \alpha_{(m+1)m} v_m \end{array}$$
   schreiben. Zeigen Sie, dass die Vektoren $w_1, \ldots, w_{m+1}$ linear abhängig sind, indem sie die folgenden zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1: $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \ldots = \alpha_{(m+1)1} = 0$.
Fall 2: O.B.d.A. ist $\alpha_{11} \neq 0$.

Lösung:

a) Seien $w_1, w_2 \in \operatorname{lin}(v_1)$, d.h. $w_1 = \lambda_1 v_1$ und $w_2 = \lambda_2 v_1$. Damit sind w_1 und w_2 linear abhängig.

b) **Fall 1:** In diesem Fall sind die m Vektoren $w_2, \dots, w_{m+1}$ in dem von den $(m-1)$ Vektoren $v_2, \dots, v_m$ aufgespannten Teilraum enthalten. Nach der Induktionsanahme sind die Vektoren $w_2, \dots, w_{m+1}$ lin. abhängig. Damit sind auch $w_1, \dots, w_{m+1}$ lin. abhängig.

Fall 2: Wie im Gauß-Jordan Eliminations-Algorithmus bilden wir nun

$$\begin{aligned} w_2' &:= w_2 - \tfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} w_1 \\ &= 0 \cdot v_1 + \big(\alpha_{22} - \tfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} \cdot \alpha_{12}\big) v_2 + \dots + \big(\alpha_{2n} - \tfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} \cdot \alpha_{1m}\big) v_m \\ &\vdots \\ w_{m+1}' &:= w_{m+1} - \tfrac{\alpha_{(m+1)1}}{\alpha_{11}} w_1 \\ &= 0 \cdot v_1 + \big(\alpha_{(m+1)2} - \tfrac{\alpha_{(m+1)1}}{\alpha_{11}} \cdot \alpha_{12}\big) v_2 + \dots + \big(\alpha_{(m+1)n} - \tfrac{\alpha_{(m+1)1}}{\alpha_{11}} \cdot \alpha_{1m}\big) v_m \end{aligned}$$

und erkennen, dass die m Vektoren $w_2', \dots, w_{m+1}'$ in dem von den $(m-1)$ Vektoren $v_2, \dots, v_m$ aufgespannten linearen Teilraum liegen. Nach der Induktionsannahme sind die Vektoren $w_2', \dots, w_{m+1}'$ linear abhängig. Also gibt es Skalare $\mu_2, \dots, \mu_{m+1}$, die nicht alle Null sind, so dass

$$\mu_2 w_2' + \mu_3 w_3' + \dots + \mu_{m+1} w_{m+1}' = 0$$

gilt. Unter Benutzung von $w_i' = w_i - \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}} w_1$ erhalten wir

$$\mu_2 \big(w_2 - \tfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} w_1\big) + \dots + \mu_{m+1} \big(w_{m+1} - \tfrac{\alpha_{(m+1)1}}{\alpha_{11}} w_1\big) = 0$$

und damit

$$\left(- \sum_{i=2}^{m+1} \mu_i \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}} \right) w_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_{m+1} w_{m+1} = 0$$

Da nicht alle $\mu_2, \dots, \mu_{m+1}$ gleich Null sind, sind die Vektoren $w_1, w_2, \dots, w_{m+1}$ linear abhängig.

Damit ist der Beweis der Proposition beendet.

Aufgabe G8 (Proposition 3.2.9)

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ Vektorraum. Zeigen Sie, dass dann für jeden linearen Teilraum U von V

$$\dim U \le \dim V$$

gilt, wobei Gleichheit nur im Falle $U = V$ gilt.

Lösung: Sei $\dim V = n$. Für jede Familie $u_1, \dots, u_m$ linear unabhängiger Vektoren gilt $m \le n$ nach 3.2.3. Daher können wir ein maximales System linear unabhängiger Vektoren in U betrachten. Aufgrund der Folgerung von 3.2.7 ist dieses eine Basis von U. Also ist U endlichdimensional und $\dim U \le \dim V$. Ist $\dim U = \dim V$, dann hat U eine Basis $u_1, \dots, u_n$ mit n Elementen. Da diese n Vektoren linear unabhängig in V sind, bilden sie auch eine Basis von V, was aus 3.2.8 folgt. Damit ist $U = V$.