Fachbereich Mathematik
D. Frisch

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

03.09.-14.09.2007
03.09.2007

1. Übungsblatt zur „Repetitorium zur Linearen Algebra“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Folgerungen aus den Vektorraumaxiomen)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie nur mit Hilfe der Vektorraumaxiome, dass dann folgende Aussagen gelten:

(V9) Für alle $u, v, w \in V$ gilt:

$$u + w = v + w \quad \Longrightarrow \quad u = w.$$

(V10) Für alle $v \in V$ ist

$$0v = 0$$

und für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ ist

$$\lambda 0 = 0.$$

Machen Sie sich hierbei klar, was das jeweilige Symbol 0 *für eine Bedeutung hat.*

(V11) Für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\lambda v = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ oder } v = 0.$$

Lösung: Unter Angabe der Axiome gilt:

(V9)

$$\begin{aligned}
& u + w = v + w \\
\Longleftrightarrow \quad & u + w + (-1)w = v + w + (-1)w \\
\overset{(V3)}{\Longleftrightarrow} \quad & u + 0 = v + 0 \\
\overset{(V2)}{\Longleftrightarrow} \quad & u = v.
\end{aligned}$$

(V10) Für den ersten Teil gilt

$$0v = (1-1)v \overset{(V8)}{=} 1v + (-1)v \overset{(V6)}{=} v + (-1)v \overset{(V3)}{=} 0.$$

Für den zweiten ergibt sich

$$\lambda \cdot 0 \overset{(V3)}{=} \lambda(v + (-1)v) \overset{(V7)}{=} \lambda v + \lambda(-1)v \overset{(V5)}{=} \lambda v + (-\lambda v) \overset{(V8)}{=} (\lambda - \lambda)v = 0v \overset{(V10)}{=} 0.$$

(V11) Ist $\lambda = 0$, so ist nichts mehr zu zeigen. Wir nehmen also $\lambda \neq 0$ an. Dann gilt

$$v \overset{(V6)}{=} 1v = (\lambda^{-1}\lambda)v \overset{(V5)}{=} \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1} \cdot 0 \overset{(V10)}{=} 0.$$

Aufgabe G2 (Der Vektorraum der $m \times n$ Matrizen)

Sei $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{K})$ die Menge aller $m \times n$ Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}$. Die Addition und skalare Multiplikation sind wie in 1.1.2 definiert. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{K})$ mit dieser Addition und skalaren Multiplikation einen Vektorraum über $\mathbb{K}$ bildet.

Lösung: Wir zeigen die Gültigkeit der Vektorraumaxiome. Im Folgenden ist $A, B, C \in \mathcal{M}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(V1) Für Matrizen A, B, C in $\mathcal{M}$ gilt

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= (a_{ij}) + ((b_{ij}) + (c_{ij})) \\ &= (a_{ij}) + ((b_{ij} + c_{ij})) \\ &= (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}) \\ &= ((a_{ij} + b_{ij})) + (c_{ij})) \\ &= (A + B) + C. \end{aligned}$$

(V2)

$$A + 0 = (a_{ij}) + (0_{ij}) = (a_{ij} + 0_{ij}) = (a_{ij}) = A.$$

(V3)

$$A + (-1)A = (a_{ij}) + (-1)(a_{ij}) = (a_{ij}) + ((-1)a_{ij}) = (a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} - a_{ij}) = (0_{ij}) = 0.$$

(V4)

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}) = B + A.$$

(V5)

$$\lambda(\mu A) = \lambda(\mu(a_{ij})) = \lambda(\mu a_{ij}) = (\lambda\mu a_{ij}) = (\lambda\mu)(a_{ij}) = (\lambda\mu)A.$$

(V6)

$$1 \cdot A = 1 \cdot (a_{ij}) = (1 \cdot a_{ij}) = (a_{ij}) = A.$$

(V7)

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) &= \lambda((a_{ij}) + (b_{ij})) = \lambda(a_{ij} + b_{ij}) = (\lambda((a_{ij} + b_{ij})) = (\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}) \\ &= (\lambda a_{ij}) + (\lambda b_{ij}) = \lambda(a_{ij}) + \lambda(b_{ij}) = \lambda A + \lambda B. \end{aligned}$$

(V8)

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)A &= (\lambda + \mu)(a_{ij}) = ((\lambda + \mu)a_{ij}) = (\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) + (\mu a_{ij}) \\ &= \lambda(a_{ij}) + \mu(a_{ij}) = \lambda A + \mu A. \end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Polynome als Vektorraum)

Sei $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ die Menge aller Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ und $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ diejenigen mit Höchstgrad n.

Zeigen Sie, dass die Mengen $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ einen Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist.

Lösung: Für $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ gilt:

(U1) Die konstante Nullfunktion ist ein Polynom, indem jeder Koeffizient gleich Null ist. Also ist $0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(U2) Seien $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, d.h. $p(x) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x^j$ und $q(x) = \sum_{j=0}^{m} \mu_j x^j$. Wir nehmen o.B.d.A. $n = m$ an. Ist dies nicht der Fall, so ergänzen wir das Polynom mit dem kleineren Grad mit 0 Koeffizienten. Damit gilt

$$p + q = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x^j + \sum_{j=0}^{n} \mu_j x^j = \sum_{j=0}^{n} (\lambda_j + \mu_j) x^j.$$

Dies ist wiederum ein Polynom und somit in $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(U3) Für $\theta \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gilt:

$$\theta p = \theta \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x^j = \sum_{j=0}^{n} \theta \lambda_j x^j.$$

Auch dies ist wieder ein Polynom und da $\theta \in \mathbb{R}$ ist auch eines mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$, d.h. $\theta p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Für $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ gilt genau dasselbe. Man muss sich nur überlegen, dass Addition und skalare Multiplikation den Grad eines Polynomes nicht ändert.

Aufgabe G4 (Proposition 2.2.5)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U_1, \ldots, U_n \subset V$ Untervektorräume. Dann ist die Summe $U_1 + \ldots + U_n$ ebenfalls ein Untervektorraum von V.

Lösung:

(U1)

$$0 = \overbrace{0 + \ldots + 0}^{n-\text{mal}} \in U_1 + \ldots + U_n.$$

(U2) Sind $u, v \in U_1 + \cdots + U_n$, so gibt es v_i und u_i aus U_i mit $u = u_1 + \ldots + u_n$ und $v = v_1 + \ldots + v_n$. Damit ist

$$u + v = u_1 + \ldots + u_n + v_1 + \ldots + v_n = (u_1 + v_1) + \ldots + (u_n + v_n).$$

Da U_i ein Untervektorraum ist, ist $u_i + v_i \in U_i$ und demnach ist $u + v \in U_1 + \ldots + U_n$.

(U3) Wiederum gibt es Elemente v_i aus U_i, sodass $v = v_1 + \ldots + v_n$ gilt. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt somit

$$\lambda v = \lambda(v_1 + \ldots + v_n) = \lambda v_1 + \ldots + \lambda v_n.$$

Da U_i ein Untervektorraum ist, ist $\lambda v_i \in U_i$ und damit $\lambda v \in U_1 + \ldots + U_n$.