Fachbereich Mathematik
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

03.09.-14.09.2007
13.09.2007

9. Übungsblatt zur „Repetitorium zur Linearen Algebra“

Gruppenübung

Aufgabe G34 (Entartete Bilinearformen)

(a) Die Bilinearform $F(x, y) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $x^T Ay$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Gibt es einen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$, so daß für jedes $x \in U$ die Abbildung $f_x := F(x, .) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ identisch Null ist, d.h. $f_x(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$?
(Dann nennt man die Bilinearform entartet.)

(b) Sei jetzt $G(x, y) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x^T By$ mit $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Gibt es einen Unterraum U wie in a), d.h. so, daß $g_x(y) := G(x, y) \equiv 0$ für alle $x \in U$ ist?

Sei Q die G entsprechende quadratische Form $Q(x) := G(x, x)$. Für welche Unterräume U von $\mathbb{R}^2$ ist $Q_{|U} : U \to \mathbb{R}$ identisch Null, d.h. $q(u) = 0$ für alle $u \in U$?

Aufgabe G35 (Quadratische Kurve)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{3}.$$

Von welchem Kurventyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T Ax + b^T x + c = 0?$$

Skizziere die Lösungsmenge im ursprünglichen Koordinatensystem.

Aufgabe G36 (Kegelschnitt)

Sei $K = \{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$ und $E = \{(x_1, x_2, x_3)^T \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$. Dann ist K ein Doppelkegel und E eine Ebene. Von welchen Kurventyp ist die Schnittmenge $K \cap E$?