Fachbereich Mathematik
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
03.09.-14.09.2007
11.09.2007

7. Übungsblatt zur „Repetitorium zur Linearen Algebra“

Gruppenübung

Aufgabe G26 (Geometrische und algebraische Vielfachheit)

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, dass für jeden Eigenwert λ einer linearen Abbildung $\varphi \in \operatorname{End}(V, V)$ mit geometrischer Vielfachheit t und algebraischer Vielfachheit s gilt:

$$t \leq s$$

Aufgabe G27 (Diagonalisieren)

a) Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

über $\mathbb{R}$.

b) Diagonalisieren Sie die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

über $\mathbb{R}$.

c) Diagonalisieren Sie die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Aufgabe G28 (Bedingungen für Diagonalisierbarkeit (7.2.13))

Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Hat eine $n \times n$ Matrix n verschiedene Eigenwerte, so ist diese diagonalisierbar.

b) Eine $n \times n$ Matrix ist genau dann über $\mathbb{K}$ diagonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom $\chi(\lambda)$ in ein Produkt von Linearfaktoren

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{s_r}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ zerlegt werden kann und falls für jeden Eigenwert λ_j die geometrische Vielfachheit t_j gleich der algebraischen Vielfachheit s_j ist.