Fachbereich Mathematik
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

03.09.-14.09.2007
06.09.2007

4. Übungsblatt zur „Repetitorium zur Linearen Algebra“

Gruppenübung

Aufgabe G14 (Kriterium zur Injektivität (5.1.4))
Seien V und W Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann bijektiv, wenn $\ker \varphi = \{0\}$ ist.

Aufgabe G15 (Ergänzung 5.1.9)
Seien V und W Vektorräume. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V. Weiterhin seien $w_1, \dots, w_n$ beliebige Vektoren in W. Dann gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi : V \to W$, sodass

$$\varphi(v_1) = w_1,\ \varphi(v_2) = w_2,\ \dots\ ,\ \varphi(v_n) = w_n$$

gilt.

Aufgabe G16 (Der Dualraum)
Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Räume W und W^0 für

$$x + 2y = 0.$$

Identifizieren Sie hierbei ein Element $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto ax + by$ in $(\mathbb{R}^2)^*$ mit dem Element $(a,b) \in \mathbb{R}$.

Aufgabe G17 (Lemma 5.3.4)
Ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, so gibt es zu jedem $v \in V$ mit $v \neq 0$ ein $\varphi \in V^*$, so dass $\varphi(v) \neq 0$ ist.

Aufgabe G18 (Kanonischer Isomorphismus)
Zeigen Sie, dass im Falle $\mathbb{K}^n$ der kanonische Isomorphismus $\Psi : \mathbb{K}^n \to (\mathbb{K}^n)^*$ durch $e_i^* = e_i^T$ gegeben ist, d.h. zeigen Sie, dass

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0 & : & i \neq j \\ 1 & : & i = j \end{cases}$$

ist.