Fachbereich Mathematik
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

03.09.-14.09.2007
04.09.2007

2. Übungsblatt zur „Repetitorium zur Linearen Algebra“

Gruppenübung

Aufgabe G5 (Proposition 3.1.1)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass für $v_1, \ldots, v_n \in V$ die Menge

$$\operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_n)$$

ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe G6 (Kriterium für lineare Unabhängigkeit (3.1.2))
Zeigen Sie, dass für $v_1, \ldots, v_n$ in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V folgende Aussagen äquivalent sind:

a) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.
b) Die Gleichung
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$
hat nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Aufgabe G7 (Proposition 3.2.3)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V, der von m Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ aufgespannt wird. Dann ist jede Auswahl $w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}$ von $m+1$ Vektoren in diesem Untervektorraum linear abhängig.

Wir zeigen dieses Aussage mit vollständiger Induktion:

a) Induktionsanfang: Zeigen Sie die Behauptung für $m = 1$.
b) Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass m Vektoren in einem Untervektorraum der von $m-1$ Vektoren aufgespannt wird linear abhängig sind.

   Sei nun $w_1, \ldots, w_{m+1} \in \operatorname{lin}(v_1, \ldots, v_m)$. Dann können wir

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & \alpha_{11} v_1 + \ldots + \alpha_{1m} v_m \\ \vdots & & \vdots \\ w_m & = & \alpha_{m1} v_1 + \ldots + \alpha_{mm} v_m \\ w_{m+1} & = & \alpha_{(m+1)1} v_1 + \ldots + \alpha_{(m+1)m} v_m \end{array}$$

schreiben. Zeigen Sie, dass die Vektoren $w_1, \dots, w_{m+1}$ linear abhängig sind, indem sie die folgenden zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1: $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \dots = \alpha_{(m+1)1} = 0$.

Fall 2: O.B.d.A. ist $\alpha_{11} \neq 0$.

Aufgabe G8 (Proposition 3.2.9)

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$ Vektorraum. Zeigen Sie, dass dann für jeden linearen Teilraum U von V

$$\dim U \leq \dim V$$

gilt, wobei Gleichheit nur im Falle $U = V$ gilt.