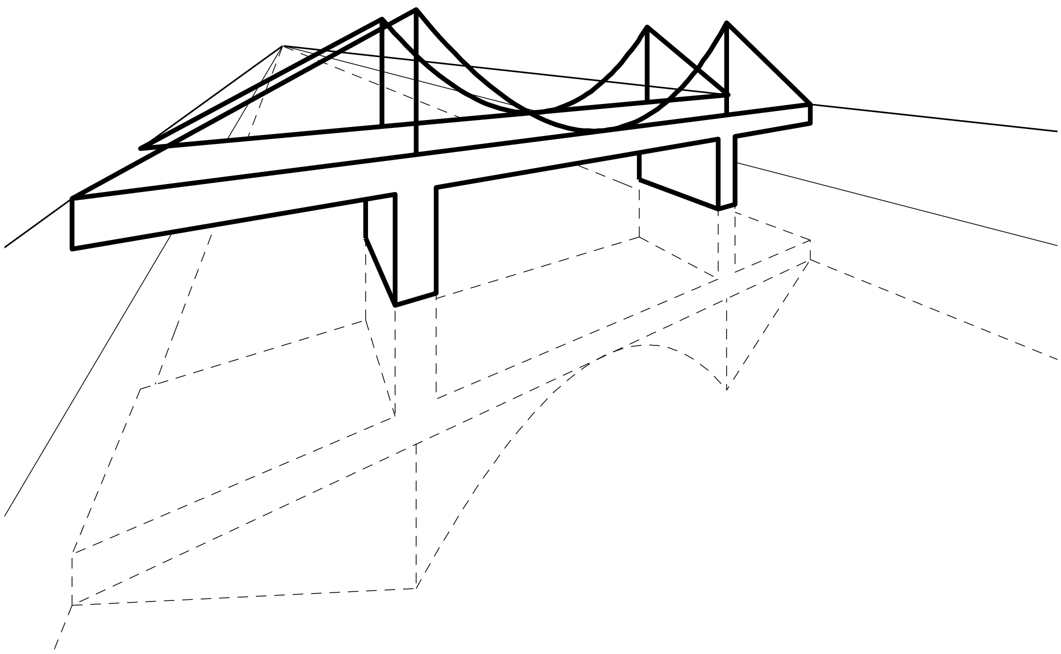
Darstellende Geometrie

Skript: Erich Hartmann



Fachbereich Mathematik
Technische Universität Darmstadt
SS 06/07

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Aufgabe der *Darstellenden Geometrie* besteht darin, räumliche Objekte in einer Zeichenebene darzustellen. Dabei spielen zwei konkurrierende Gesichtspunkte eine wesentlichen Rolle. Will man *Maßgenauigkeit* erreichen, so ist dies meistens nur unter Verlust von *Anschaulichkeit* möglich. Z.B. lassen die beiden folgenden Bilder eines Hauses leicht auf Länge, Breite und Höhe schließen; sie sind aber nicht sehr anschaulich.

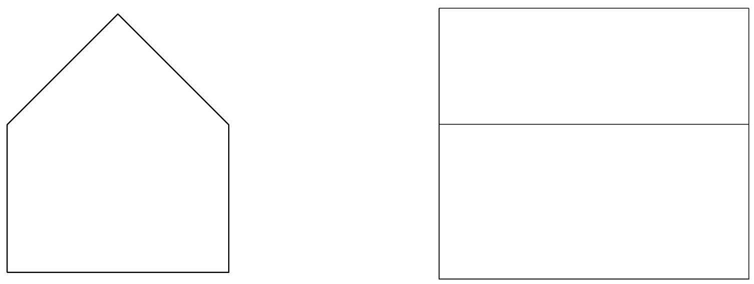
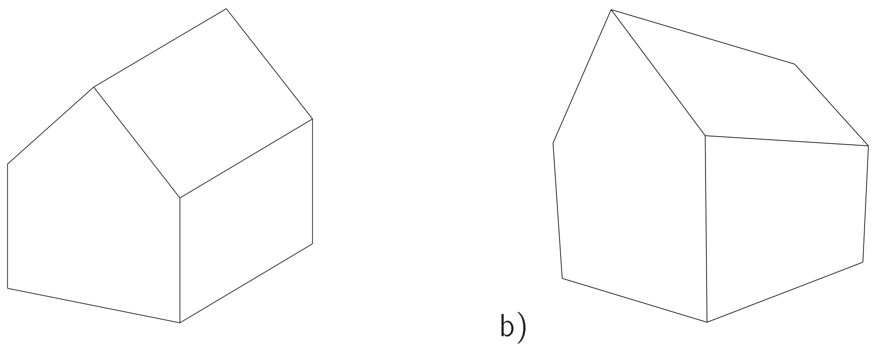


Abbildung 1.1: Haus in Seitenansicht

Dagegen bringen die nächsten beiden Bilder den räumlichen Eindruck mehr zur Geltung. Genaue Abmessungen lassen sich aber (insbesondere aus dem rechten Bild) nur schwer ablesen.



a) b)

Abbildung 1.2: Haus in a) senkrechter Parallel- und b) Zentralprojektion

1.1 Abbildungsverfahren

In der Darstellenden Geometrie bedient man sich im wesentlichen zweier Abbildungsverfahren. Dabei werden Punkte und Kurven eines Objektes mit Hilfe von Strahlen (Geraden) auf eine Bildtafel (Ebene) projiziert:

1.1.1 a) Parallelprojektion

Die Abbildungsstrahlen sind **parallel**, wie z.B. beim Sonnenlicht. Dabei unterscheidet man noch die beiden Fälle:

a1) Die Strahlen stehen **senkrecht** zur Bildtafel (*senkrechte Parallelprojektion*).

a2) Die Strahlen stehen **nicht senkrecht** zur Bildtafel (*schiefe Parallelprojektion*).

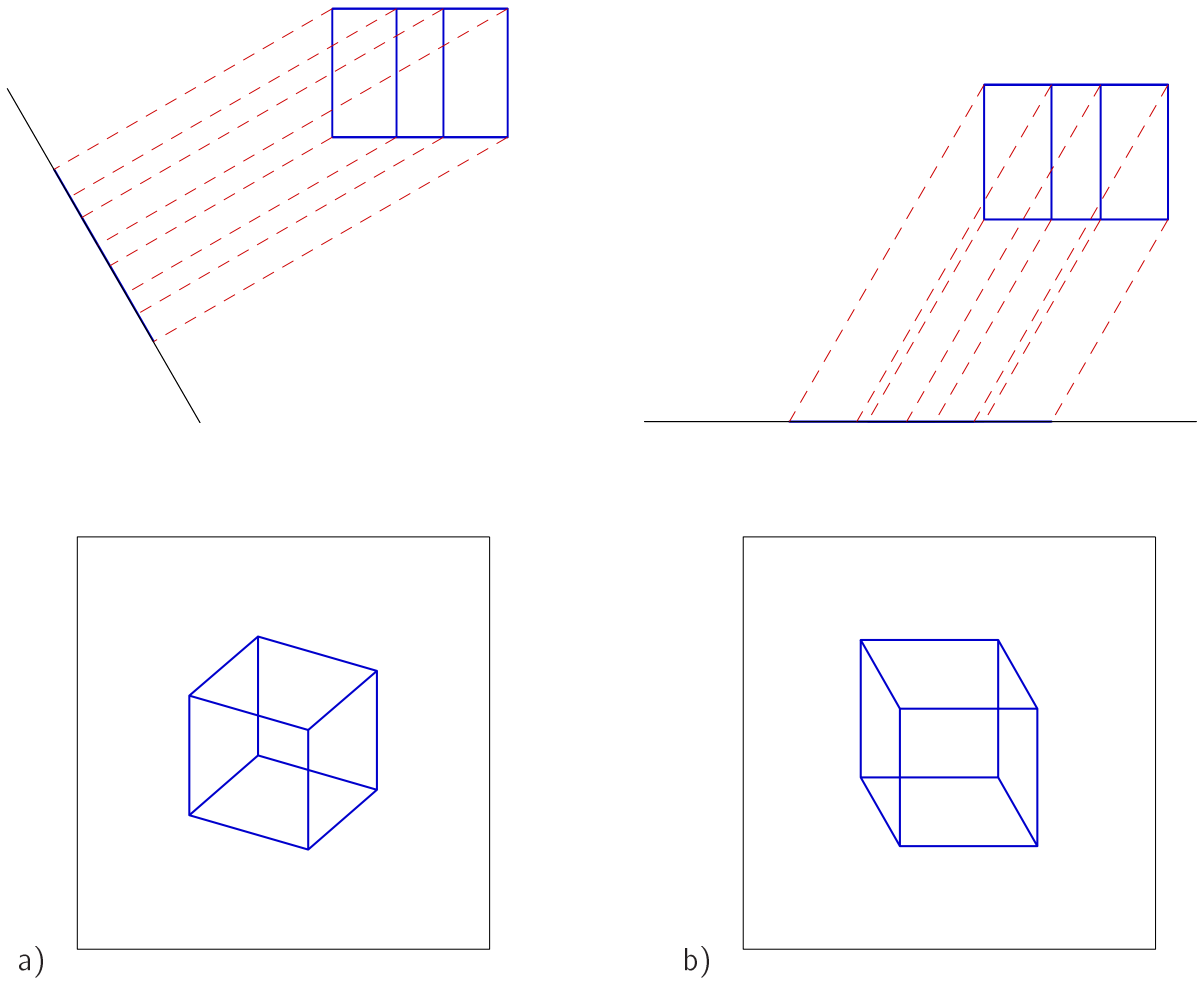


Abbildung 1.3: Quader in a) senkrechter und b) schiefer Parallelprojektion

Bemerkung:
Parallelprojektionen werden gerne von Ingenieuren verwendet wegen ihrer Verhältnistreue. Der Spezialfall **Vogelperspektive** ist eine schiefe Parallelprojektion (siehe Absch. 2.2.1), die insbesondere zur Veranschaulichung von Stadtplänen verwendet wird. Sie lässt sich relativ einfach von Hand herstellen.
Wir werden hier im Wesentlichen sog. **axonometrische** Bilder (schiefe/senkrechte Parallelprojektionen) mit Hilfe des *Einschneideverfahrens* herstellen.

1.1.2 b) Zentralprojektion

Alle Abbildungsstrahlen gehen durch einen Punkt, *Projektionszentrum* oder *Augpunkt* genannt.

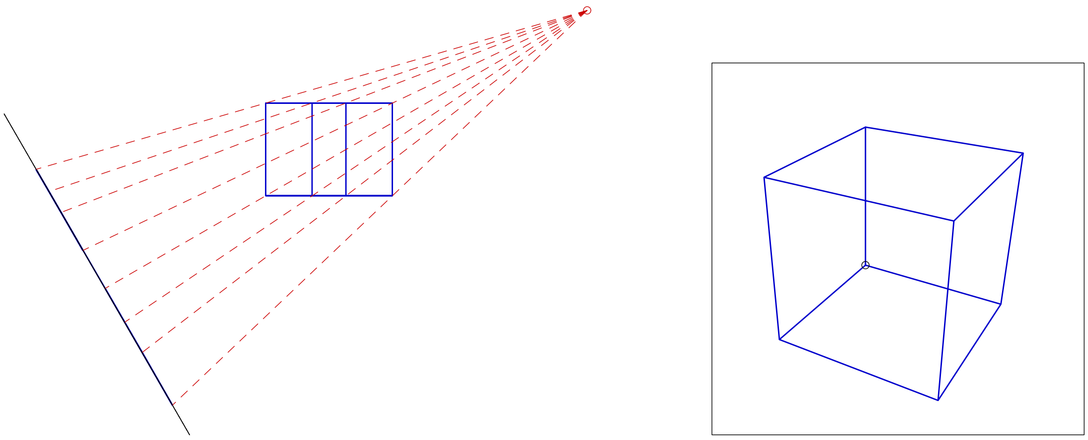


Abbildung 1.4: Quader in Zentralprojektion

a)

b)

Abbildung 1.5: Häuser in a) Parallelprojektion b) Zentralprojektion

Merke:
Bei Parallelprojektion sind die Bilder paralleler Geraden i.A. wieder parallel.
Bei Zentralprojektion schneiden sich die Bilder paralleler Geraden i.A. in einem Punkt, dem *Fluchtpunkt* des Parallelbüschels.

Abbildung 1.6: Festsaal in Zentralprojektion

1.2 Lernziele der Vorlesung

Ziel der Vorlesung ist **nicht** das Erstellen komplexer Zeichnungen, hierzu verwendet man Computer. **Statt dessen** sollen die folgenden **Fähigkeiten** erlangt werden:

- von einem 3D–Objekt schnell eine *Skizze anfertigen*,
- vorgefertigte Zeichnungen *lesen*,
- in vorgefertigte Zeichnungen oder Photos *Ergänzungen einfügen*,
- aus vorgefertigten Zeichnungen oder Photos *wahre Längen und Winkel* oder ganze Grund– und Aufrisse bestimmen.

1.3 Literatur

Das **Skript** zur Vorlesung ist nicht als Lehrbuch zum Selbststudium gedacht, sondern als Sammlung von Arbeitsblättern. Wesentliche Konstruktionen werden in der Vorlesung erarbeitet und in das Skript eingezeichnet. Es ist deshalb ratsam, regelmäßig an der Vorlesung teilzunehmen und das Skript dort zu vervollständigen. Wichtige Konstruktionen werden stichwortartig beschrieben und durch Einrahmungen optisch hervorgehoben. Als weiterführende Literatur für Vorlesung und Praxis werden empfohlen:

a) Leopold: *Geometrische Grundlagen der Architekturdarstellung*, Kohlhammer-Verlag, Köln
b) Fucke, Kirch, Nickel: *Darstellende Geometrie*, Fachbuchverlag Leipzig,
c) Graf, Barner: *Darstellende Geometrie*, (nur noch in Bibliotheken zu finden).

Im Folgenden werden **Hinweise** auf entsprechende Textstellen gegeben (z.B.: s. LEO, S. xx, s. FKN, S. yy).

1.4 Grundbegriffe

Wir verwenden hier die folgenden Bezeichnungen und Symbole.

1.4.1 Bezeichnungen

Punkte: Große lateinische Buchstaben $P, A, B, C, \ldots,$
Geraden, Kurven: kleine lateinische Buchstaben $a, b, c, \ldots,$
Ebenen: kleine griechische Buchstaben $\varepsilon, \pi, \ldots,$
Winkel: kleine griechische Buchstaben $\alpha, \beta, \delta, \varphi, \ldots.$

1.4.2 Symbole

PQ: Gerade durch die Punkte P, Q, $\overline{PQ}$: Strecke mit den Endpunkten P, Q,
$|PQ|$: Länge der Strecke PQ.
$g \parallel h$: Gerade g parallel zu Gerade h, $\nparallel$: nicht parallel,
$\sphericalangle(a, b)$: Winkel mit den Schenkeln a und b,
$g \perp h$: Gerade g ist senkrecht (orthogonal) zu Gerade h.

Wir fassen Geraden, Kurven, Ebenen, Flächen, ... als Punkt*mengen* auf und benutzen die für Mengen üblichen Symbole:
$P \in \varepsilon$: Punkt P liegt in der Ebene ε, $P \notin \varepsilon$: Punkt P liegt nicht in der Ebene ε,
$g \subset \varepsilon$: Gerade g ist in der Ebene ε enthalten,
$g \cap \varepsilon$: Schnitt der Geraden g mit der Ebene ε, $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$: Schnitt zweier Ebenen,
Zwei sich **nicht** schneidende Geraden, die nicht in einer Ebnene liegen, heißen *windschief*.

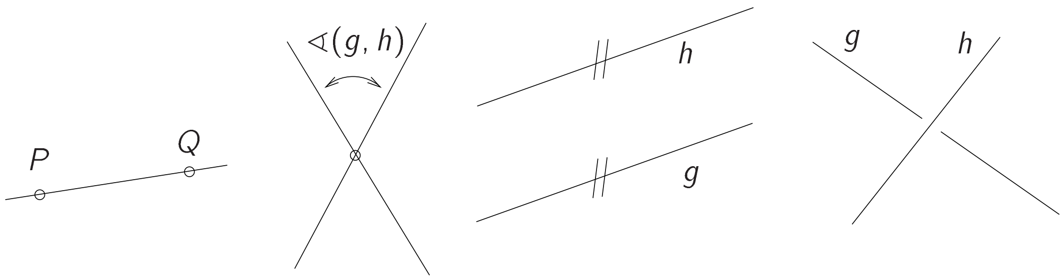


Abbildung 1.7: Gerade sowie schneidende, parallele, windschiefe Geraden

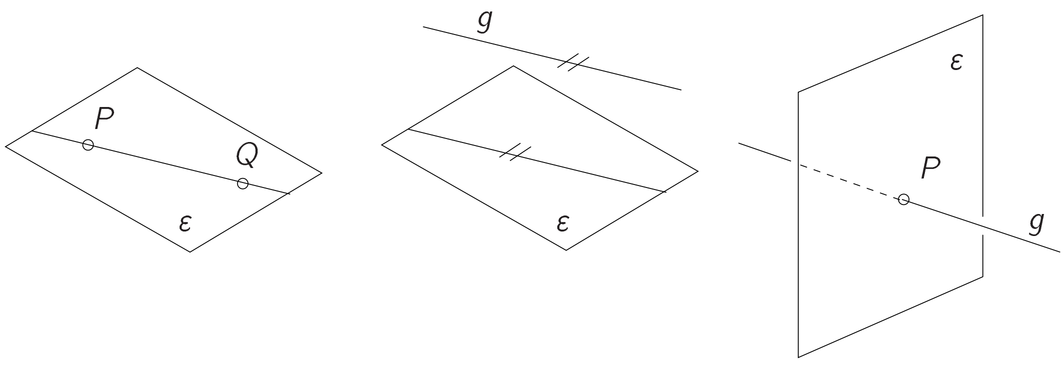


Abbildung 1.8: Gerade enthalten in, parallel und senkrecht zu einer Ebene

Vereinbarung:
Verdeckte (*unsichtbare*) Kanten oder Kurven werden gestrichelt, abgesetzt oder weggelassen.

1.5 Eigenschaften von Projektionen

Projektionen sind i.A.:

- *punkttreu*, d.h. jeder Punkt P wird auf genau einen Punkt P' abgebildet.
- *geradentreu*, d.h. eine Gerade g wird auf eine Gerade g' abgebildet. Fällt g mit einem Projektionsstrahl zusammen, so wird g' zu einem Punkt; in diesem Fall heißt g *projizierend*.
- *inzidenzerhaltend*, d.h. aus $P \in g$ folgt $P' \in g'$.

Im Folgenden sind einige Besonderheiten von Parallel– bzw. Zentralprojektionen zusammengestellt.

1.5.1 Parallelprojektion

(P1) Die Bilder paralleler Geraden sind i.A. wieder parallel. (Ausnahmen: projizierende Geraden.)

(P2) Parallele Geradenstücke werden im gleichen Verhältnis verzerrt.

(P3) Ebene Figuren erscheinen im Bild unverzerrt, wenn sie parallel zur Bildtafel liegen.

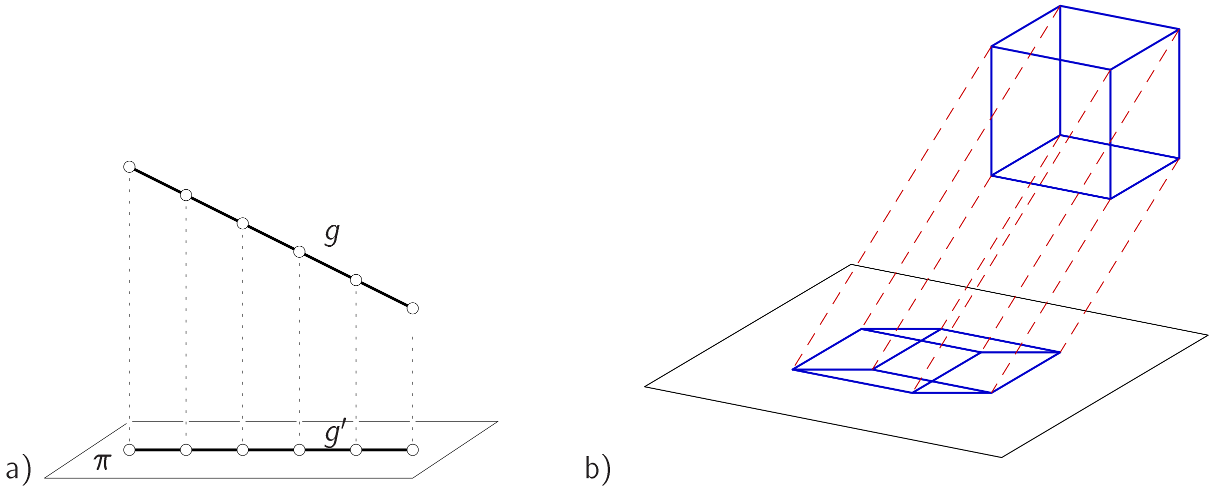


Abbildung 1.9: a) Teilverhältnistreue der Parallelprojektion b) In Vogelperspektive bleiben Deckel und Boden des Quaders unverzerrt, während die vier vertikalen Kanten im gleichen Maß verzerrt sind (s. auch Abb. 1.3).

1.5.2 Zentralprojektion

Die Eigenschaften (P1) – (P3) gelten bei Zentralprojektion **nicht**. (Vergleiche die Beispiele in Figur 1.2.) Aber es gilt:

(Z1) Die Bilder paralleler Geraden schneiden sich i.A. in einem Punkt, dem *Fluchtpunkt* des zugehörigen Parallelbüschels (Menge der zu einer festen Gerade parallelen Geraden). Ausnahme: Die Bilder von parallelen Geraden, die in einer Ebene parallel zur Bildtafel liegen, bleiben parallel.

(Z2) Alle Geraden einer Ebene durch das Zentrum Z (*projizierende Ebene*) werden in eine Gerade oder einen Punkt (wann?) abgebildet.

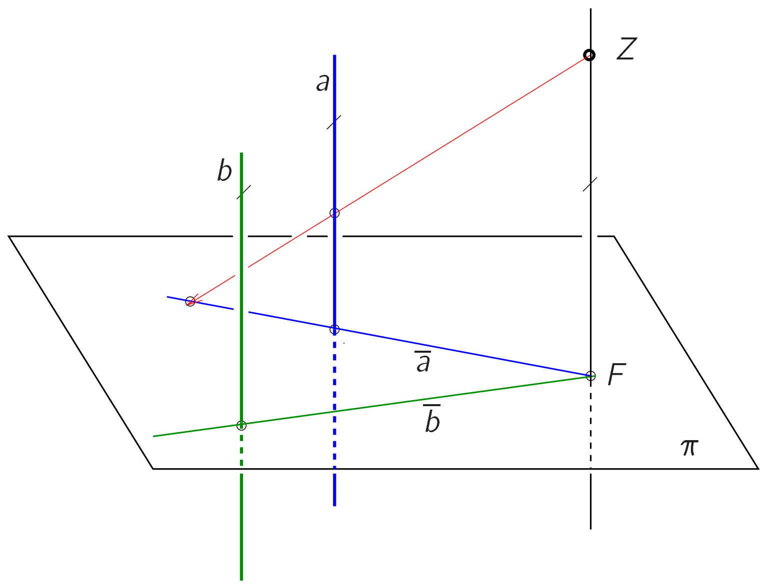


Abbildung 1.10: Fluchtpunkt bei Zentralprojektion

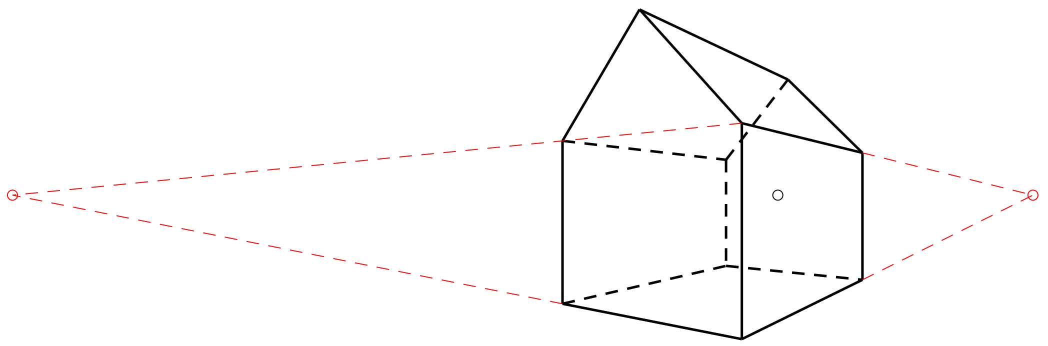


Abbildung 1.11: Fluchtpunkte bei Zentralprojektion eines Hauses

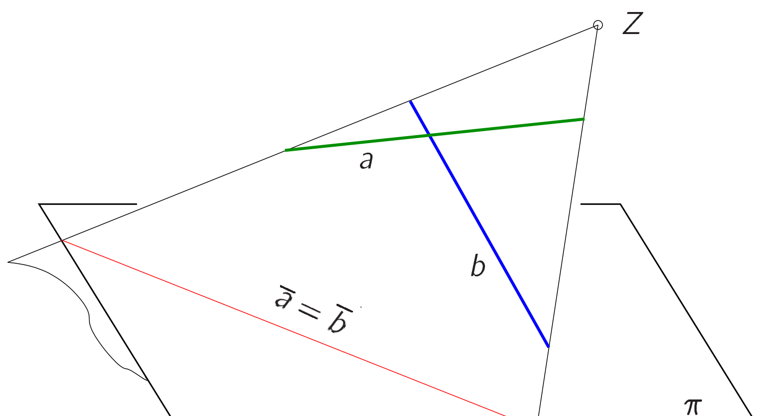


Abbildung 1.12: Projizierende Ebene bei Zentralprojektion

1.6 Grundriss, Aufriss, Risskante, Ordner

Im nächsten Kapitel benötigen wir die Begriffe "Grundriss" und "Aufriss"; wir werden sie im Kapitel 3, Zweitafelprojektion noch näher studieren.
Es seien π_1, π_2 zwei auf einander senkrecht stehende Ebenen und P ein Punkt. π_1 sei horizontal und heißt *Grundrissebene* (oder *–tafel*), π_2 *Aufrissebene* (oder *–tafel*). Die Schnittgerade $k_{12} := \pi_1 \cap \pi_2$ nennt man *Risskante*. Projiziert man P **senkrecht** auf die Ebene π_1 bzw. π_2, so erhält man den *Grundriss* P' bzw. den *Aufriss* P'' von P. Um Operationen oder Konstruktionen, bei denen P eine Rolle spielt, in **einer** Zeichenebene darstellen zu können, klappt man die Aufrisstafel π_2 um die Risskante k_{12} in die Grundrisstafel π_1. **Nach** dieser Umklappung liegen P' und P'' auf einer Senkrechten zur Risskante. Ein *Ordner* verbindet P' und P'', er steht senkrecht zu k_{12}.

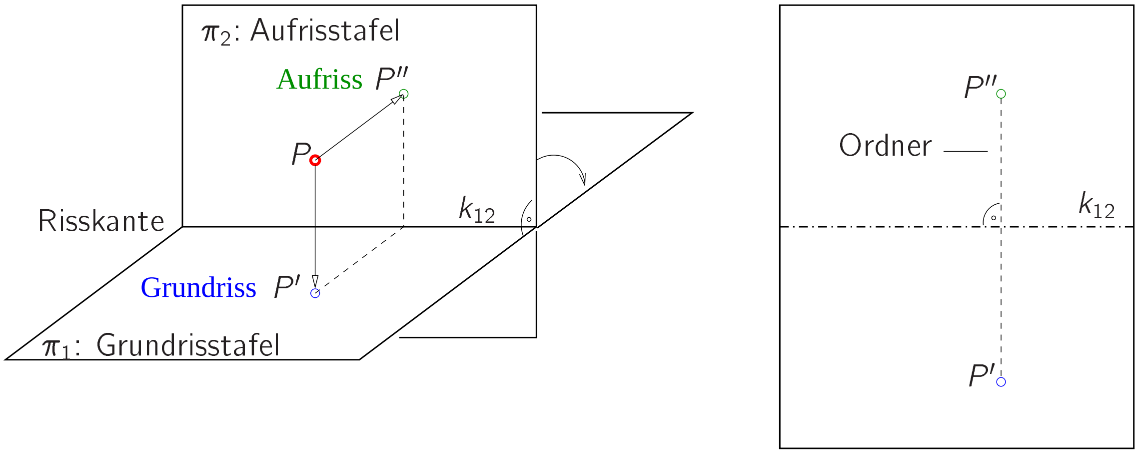


Abbildung 1.13: Grundriss und Aufriss eines Punktes

Merke:
Grundriss P' und Aufriss P'' eines Punktes liegen auf demselben Ordner!
Ein Punkt P ist durch seinen Grund– und Aufriss eindeutig bestimmt.

Zur eindeutigen Beschreibung eines Objektes sind also mindestens **zwei** senkrechte Parallelprojektionen notwendig.

Im Folgenden sind Grund– und Aufrisse einiger Objekte gegeben, die den gleichen Grundriss besitzen.

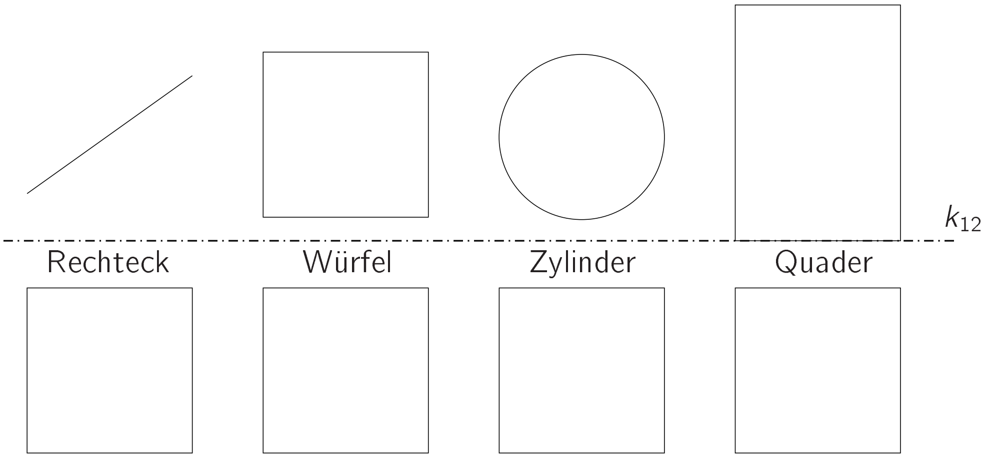


Abbildung 1.14: Verschiedene Objekte mit dem gleichen Grundriss

Kapitel 2

Axonometrie

2.1 Konstruktion eines Bildpunktes

(s. LEO S.67)

Die Axonometrie dient dem Erstellen anschaulicher Bilder. Sie basiert auf der folgenden **Idee**:

Man führt im Raum ein geeignetes Koordinatensystem ein und beschreibt wesentliche Punkte des Objektes, das abgebildet werden soll, durch Koordinaten bezüglich des Koordinatensystems. Üblicherweise benutzt man ein **rechtwinkliges** Koordinatensystem $(O; x, y, z)$, bei dem die x–, y– und z–Achsen ein **Rechtssystem** bilden, d.h. blickt man in negativer z-Richtung auf die x-y–Ebene, so haben die x– und y–Achsen die "übliche" Orientierung.

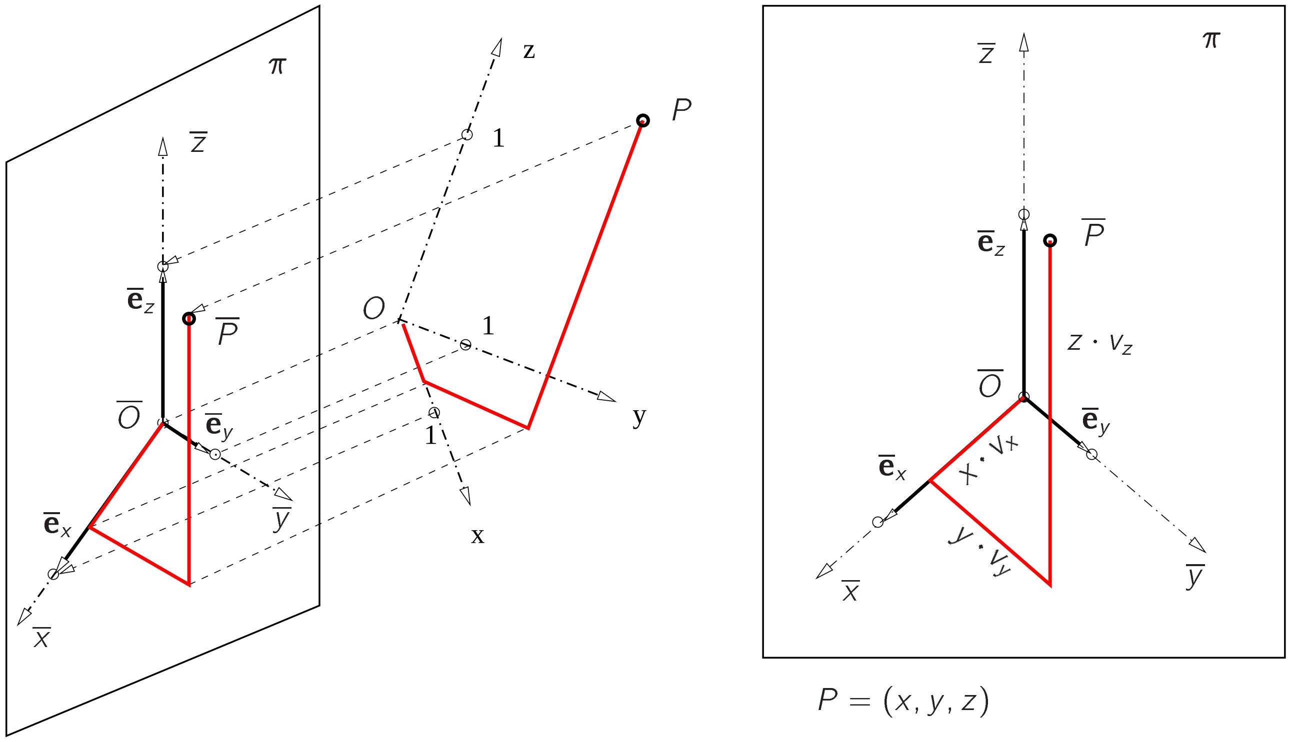


Abbildung 2.1: Axonometrie: Bilder der Koordinatenachsen und Konstruktion eines Bildpunktes

Man projiziert jetzt den Ursprung O sowie die Koordinatenachsen zusammen mit ihren Basisvektoren $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, Die Bilder der Basisvektoren seien $\overline{\mathbf{e}}_x, \overline{\mathbf{e}}_y, \overline{\mathbf{e}}_z$. Durch die Projektion werden i.a. alle drei Maßstäbe der Achsen verzerrt wiedergegeben. Die **Verzerrungsverhältnisse** $|\overline{\mathbf{e}}_x| : 1, |\overline{\mathbf{e}}_y| : 1, |\overline{\mathbf{e}}_z| : 1$ werden mit v_x, v_y, v_z bezeichnet.

Konstruktion eines Bild-Punktes: Gegeben (x, y, z)

Gehe (in der Bildtafel von $\overline{O}$ aus)
1. um $x \cdot v_x$ in $\overline{\mathbf{e}}_x$–Richtung und dann
2. um $y \cdot v_y$ in $\overline{\mathbf{e}}_y$–Richtung und dann
3. um $z \cdot v_z$ in $\overline{\mathbf{e}}_z$–Richtung.

(Die Reihenfolge kann beliebig vertauscht werden.)

Beim Zeichnen der Projektionen mehrerer Punkte sollte man vorhandene Parallelitäten (wie z.B. bei einem Quader) ausnutzen. (Parallele Geraden gehen in parallele Geraden über !)

Ist die Projektionsrichtung **senkrecht** zur Bildtafel, so spricht man von *senkrechter Axonometrie*. Im anderen Fall von *schiefer* Axonometrie.

In der Praxis projiziert man nicht mühsam das Koordinatensystem, sondern wählt irgendeinen Punkt $\overline{O}$ als Bild des Koordinatenursprungs O und drei von $\overline{O}$ in verschiedene Richtungen verlaufende Vektoren $\overline{\mathbf{e}}_x, \overline{\mathbf{e}}_y, \overline{\mathbf{e}}_z$. Die Grundlage hierfür ist der **Satz von Pohlke**:
Drei in verschiedenen Richtungen von einem Punkt $\overline{O}$ ausgehende Strecken können, bis auf Ähnlickeit, als die Parallelprojektion eines Koordinatendreibeins eines senkrechten, rechtsorientierten Koordinatensystems aufgefasst werden.

Um ein anschauliches Bild eines Gegenstandes zu erhalten, muss man allerdings die Vektoren $\overline{\mathbf{e}}_x, \overline{\mathbf{e}}_y, \overline{\mathbf{e}}_z$ "geeignet" wählen. Dies wollen wir uns an dem Beispiel des Einheitswürfels klar machen (Abb. 2.2):

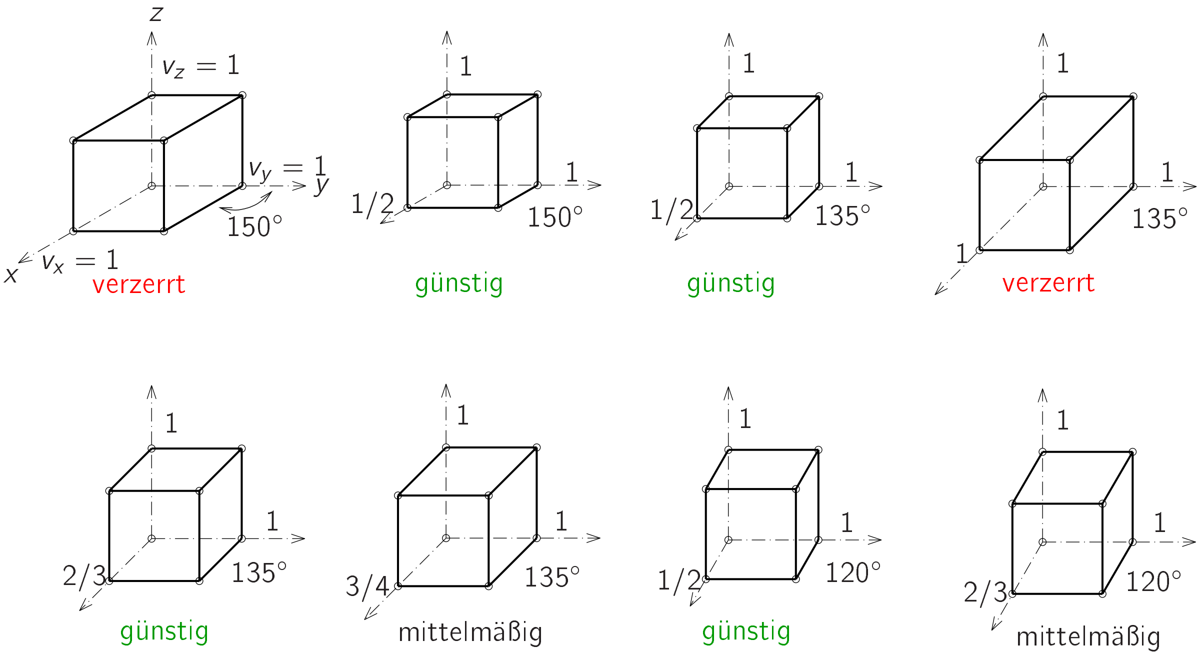


Abbildung 2.2: Verschiedene Axonometrien eines Würfels

Man unterscheidet

isometrische Axonometrie:	**alle** Verzerrungen sind **gleich**,
dimetrische Axonometrie:	**zwei** Verzerrungen sind **gleich**,
trimetrische Axonometrie:	**alle** Verzerrungen sind **verschieden**

Die **Sichtbarkeit** folgt aus der Anordnung der Achsen im Bild und der Tatsache, dass das Koordinatensystem ein Rechtssystem ist.

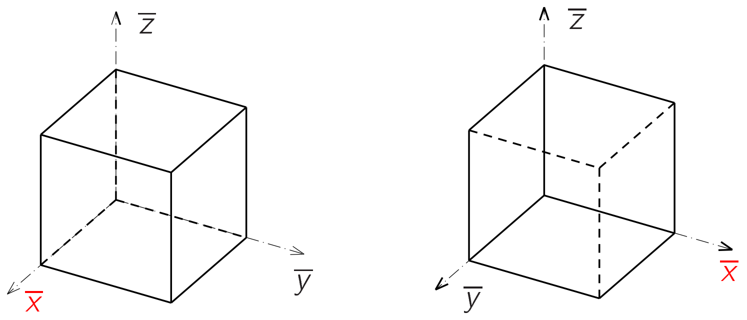


Abbildung 2.3: Sichtbarkeit und Achsenorientierung

Aufgabe 2.1 *Stelle axonometrische Bilder eines Hauses her (Abb. 2.4).*

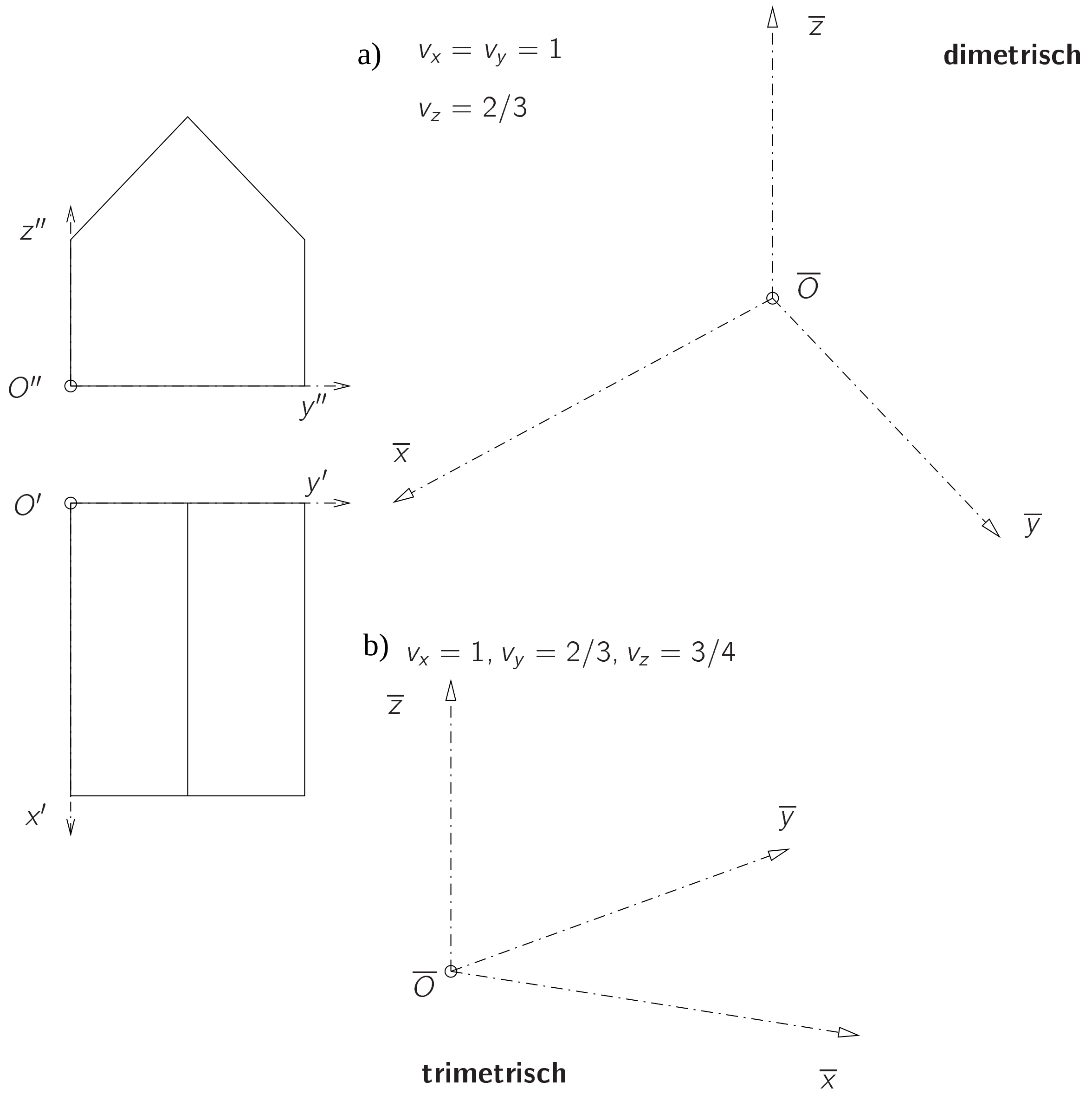


Abbildung 2.4: Axonometrien eines Hauses

2.2 Spezielle Axonometrien

2.2.1 Vogel– und Kavalierperspektive (s. LEO S.70,71)

Die Herstellung eines axonmetrischen Bildes eines Gegenstandes ist besonders einfach, wenn Verzerrungsverhältnisse **1** sind. Deshalb treffen wir in diesem Abschnitt die folgende **Vereinbarung**:

Eine Koordinatenebene sei parallel zur Bildtafel π.

In diesem Fall können nicht nur zwei Koordinaten unverzerrt übernommen werden, sondern jede Objektfigur parallel zu der ausgewählten Koordinatenebene hat ein kongruentes Bild.
Man unterscheidet:
(1) **Kavalierperspektive**: Die Bildtafel ist parallel zur x-z– oder y-z–Ebene.
(2) **Vogelperspektive**: Die Bildtafel ist parallel zur x-y–Ebene.

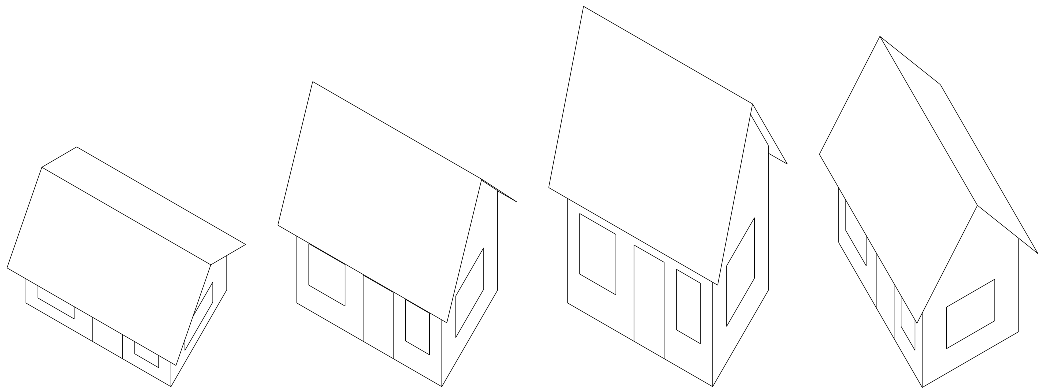


Abbildung 2.5: Vogelperspektiven eines Hauses

Aufgabe 2.2 *Zeichne von dem durch Grund– und Aufriss gegebenen Haus (Abb. 2.6) ein "günstiges" Bild a) in Kavalierperspektive b) in Vogelperspektive.*

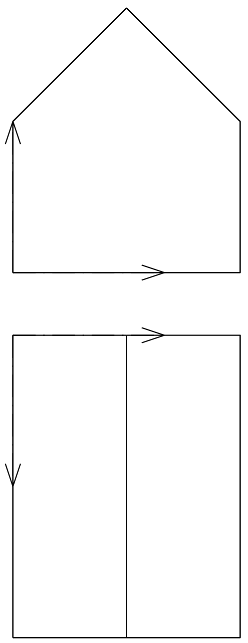
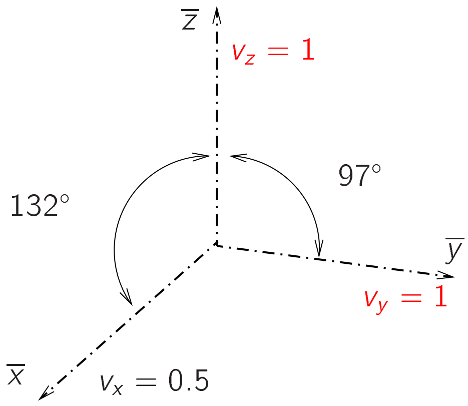


Abbildung 2.6: Kavalier– und Vogelperspektive eines Hauses

2.2.2 Ingenieur–Axonometrie

Bei der Ingenieur–Axonometrie trifft man folgende **Vereinbarung**:

1. Die Verzerrungen sind $v_x = 0.5$, $v_y = v_z = 1$ (dimetrische Axonometrie) .
2. In der Projektion ist der
   Winkel zwischen der z–Achse und der x–Achse 132°,
   Winkel zwischen der z–Achse und der y–Achse 97°.
   (siehe Geodreieck !)



Die **Vorteile** der Ingenieur–Axonometrie sind:

- Das axonometrische Bild ist nahezu eine um den Faktor 1.06 skalierte **senkrechte** Parallelprojektion.
- Die hierzu notwendigen Winkel von 7° und 42° sind auf vielen Geodreiecken markiert.
- Der Umriss einer Kugel ist in guter Näherung ein Kreis.

Aufgabe 2.3 *Zeichne von dem durch Grund– und Aufriss gegebenen Turm (Abb. 2.7) ein axonometrisches Bild in Ingenieur–Axonometrie.*

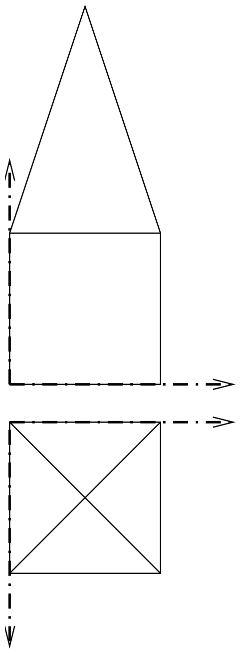


Abbildung 2.7: Aufgabe: Ingenieur–Axonometrie eines Turmes

Bemerkung:
Falls es geeignet erscheint, kann man auch die Winkel und Verzerrungen vertauschen:
a) $v_x = 1$, $v_y = 0.5$,
b) Winkel zwischen z–Achse und x–Achse: 97° und Winkel zwischen z–Achse und y–Achse: 132°.

2.3 Einschneideverfahren

(s. LEO S.75)

Das Antragen der einzelnen Punkte ist bei komplexen Objekten mühsam. Hier hilft das **Einschneideverfahren**:

Vorgabe: Objekt in zwei orthogonalen, zugeordneten Projektionen (Rissen).
Einschneideverfahren:

1. Man legt die beiden Risse "beliebig" in die Zeichenebene π und
2. wählt zwei verschiedene *Einschneiderichtungen* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.
3. Durch die Risse P', P'' eines Punktes P werden je ein Strahl $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ in $\mathbf{e}_1$–, $\mathbf{e}_2$–Richtung gezogen.
4. $\mathbf{p}_1 \cap \mathbf{p}_2 = \overline{P}$ ist das axonometrische Bild von P.

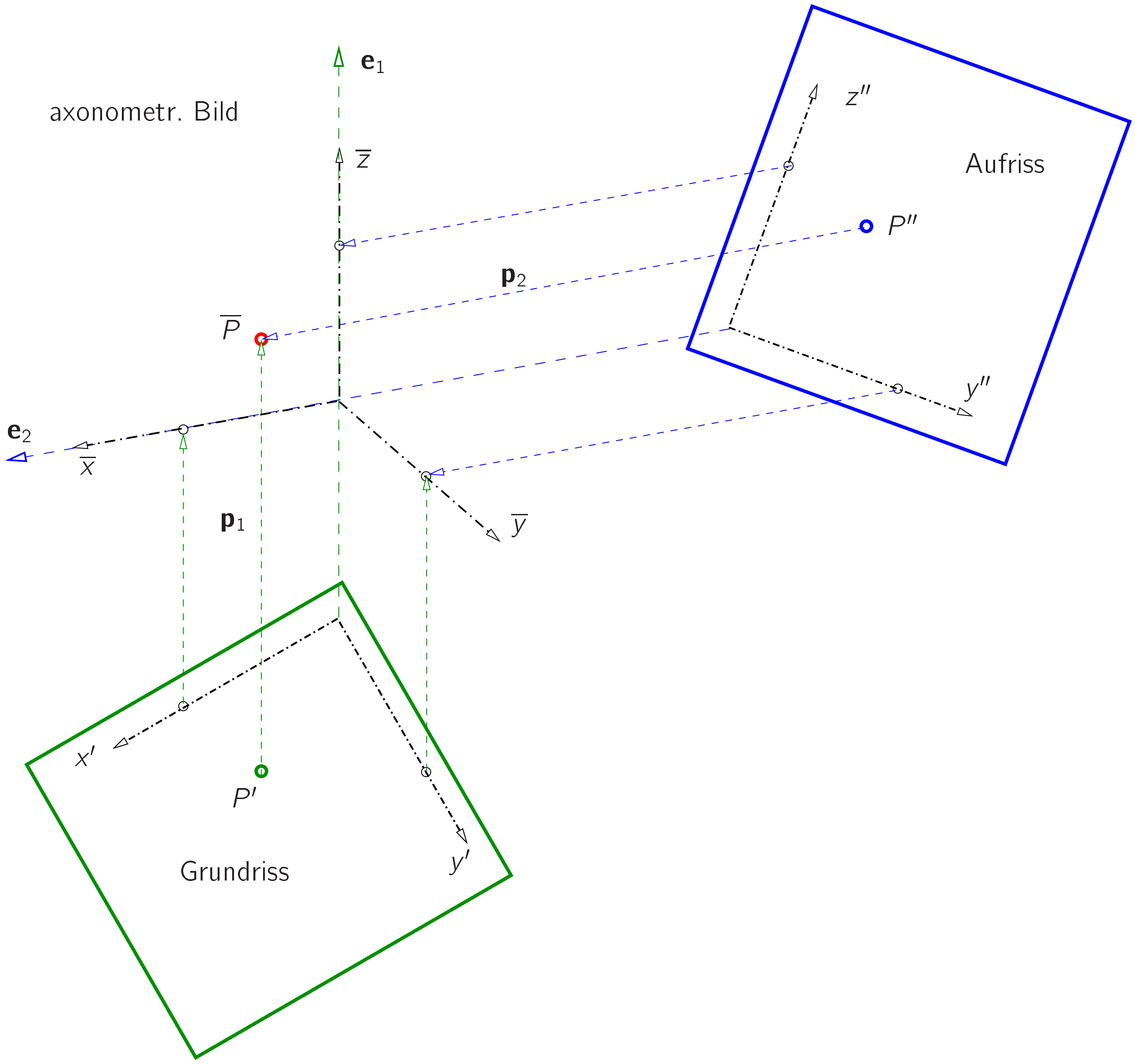


Abbildung 2.8: Einschneideverfahren

Aufgabe 2.4 *Stelle ein axonometrisches Bild eines Hauses mit Hilfe des Einschneideverfahrens her (Abb. 2.9).*

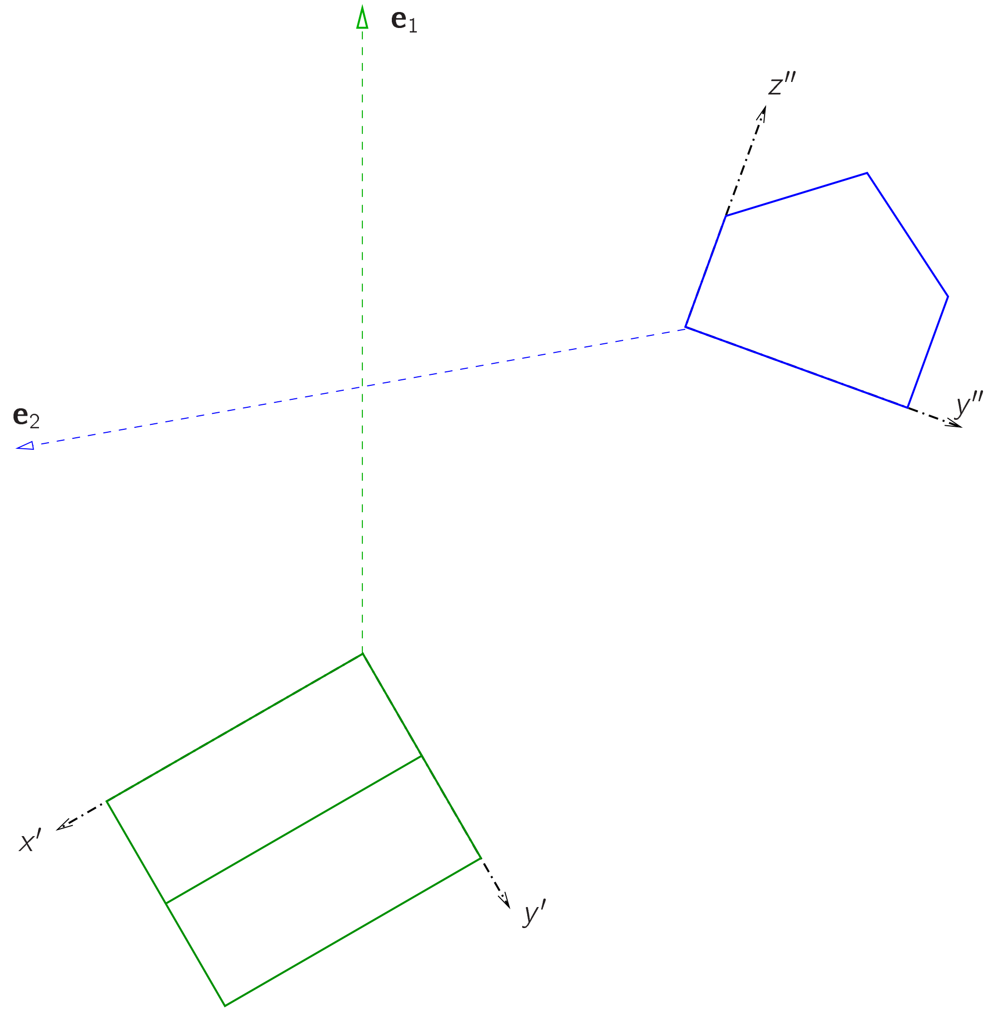


Abbildung 2.9: Einschneideverfahren: Haus

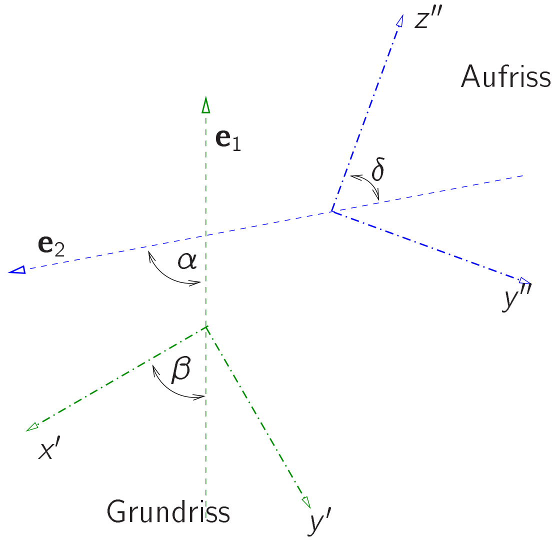


Abbildung 2.10: "Gute" Bilder bei: $\alpha = 50^o ... 90^o, \beta = 5^o ... \alpha, \delta \approx \beta$

2.4 Bemerkungen zur senkrechten Axonometrie

Senkrecht axonometrische Bilder haben eine deutlich bessere Bildwirkung als "beliebige" schiefe axonometrische Bilder. Allerdings muss dafür etwas mehr Vorarbeit geleistet werden. Es können zwar immer noch die Bilder der Achsen frei vorgegeben werden, aber
a) die **Verkürzungen** für die axonometrische Konstruktion und
b) die **Lagen** der Grund– und Aufrisse für das Einschneideverfahren
können nicht mehr beliebig gewählt werden (s. Abschnitt 3.6).

Weitere **Vorteile** der senkrechten Axonometrie sind:
1) Umrisse von Kugeln sind Kreise,
2) Bilder von Kreisen, die zu Koordinatenebenen parallel sind, lassen sich relativ leicht konstruieren (s. Aufgabe 4.4).

2.5 Schatten in der Axonometrie

Um den räumlichen Eindruck eines axonometrischen Bildes noch zu verstärken, wollen wir für einfache Fälle Schatten konstruieren.
Wir setzen im axonometrischen Bild den Schattenwurf einer senkrechten Kante bei **parallelem/zentralem** Licht voraus, womit die Lichtrichtung eindeutig festgelegt ist. Um nicht schon Durchstoßpunkte konstruieren zu müssen, betrachten wir hier nur Fälle mit Schatten auf **senkrechten** und/oder **waagrechten** Ebenen.

Idee: Um den Schatten $\tilde{P}$ eines Punktes P auf der *Grundriss*-Ebene zu finden, schneidet man den Lichtstrahl ℓ durch P mit dem Grundriss ℓ' des Lichtstrahls durch den Grundriss P' von P. Bei **parallelem** Licht sind alle Lichtstrahlen parallel, bei **zentralem** Licht gehen alle Lichtstrahlen durch einen Punkt!

2.5.1 Schatten bei parallelem Licht (s. LEO S.172)

Aufgabe 2.5 *Gegeben ist ein axonometrisches Bild eines Hauses und Lichtrichtung ℓ durch den Schattenwurf einer senkrechten Kante. Zeichne den Schatten in das axonometrische Bild (Abb. 2.11).*

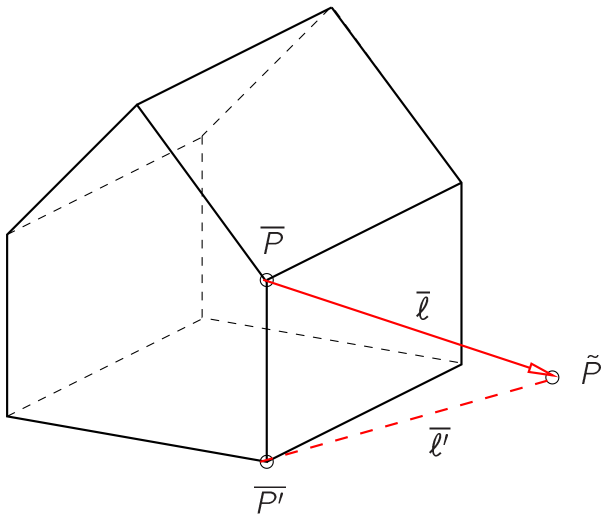


Abbildung 2.11: Schatten eines Hauses bei parallelem Licht

Aufgabe 2.6 *Gegeben ist ein axonometrisches Bild (Kavalierperspektive) zweier Quader und Lichtrichtung ℓ durch den Schattenwurf einer Kante (Abb. 2.12). Zeichne den Schatten.*

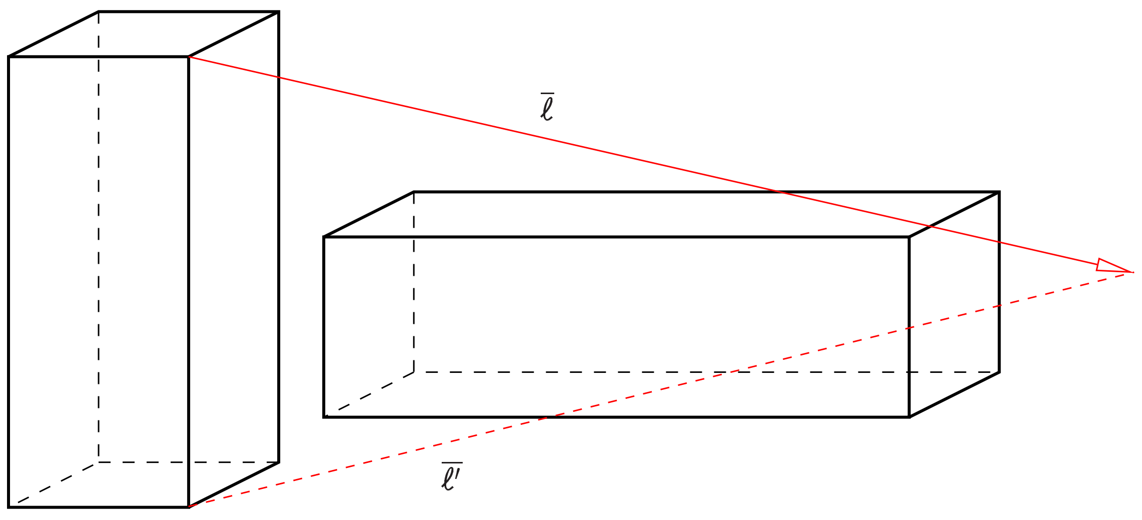


Abbildung 2.12: Schatten zweier Quader bei parallelem Licht

2.5.2 Schatten bei zentralem Licht

(s. LEO S.181)

Nun setzen wir Licht voraus, das von einem Punkt (Lampe) ausgeht. Die Lichtquelle ist durch die Position der Lampe L und deren Fußpunkt L' (Grundriss der Lampe in der Standebene des Objektes) eindeutig bestimmt. Die Konstruktion verläuft analog zu der bei parallelem Licht (s. Fig. 2.13).

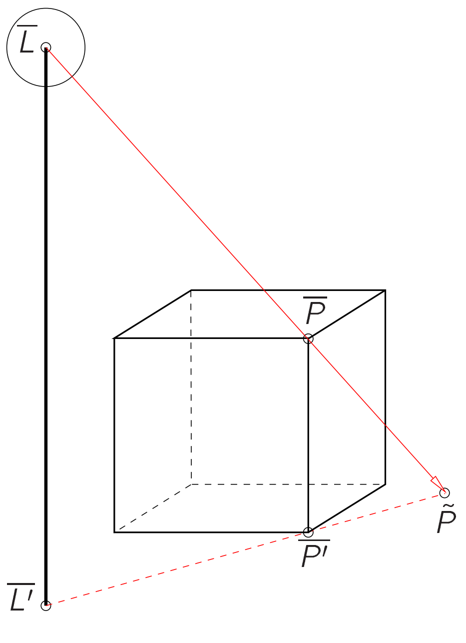


Abbildung 2.13: Schatten eines Quaders bei zentralem Licht

Aufgabe 2.7 *Gegeben ist ein axonometrisches Bild eines Hauses und die Lichtquelle L mit ihrem Grundriss. Zeichne den Schatten in das axonometrische Bild (Abb. 2.14).*

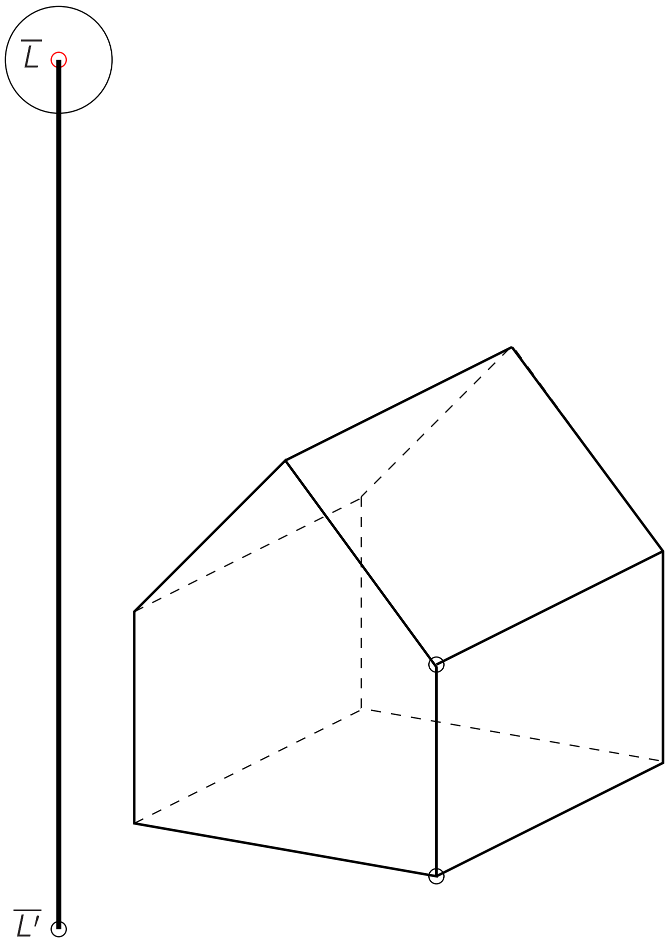


Abbildung 2.14: Schatten eines Hauses bei zentralem Licht

Bemerkung:
Bei komplizierteren Fällen konstruiert man den Schatten zuerst in Grund– und Aufriss.

Kapitel 3

Zwei– und Mehrtafelprojektion, Dachausmittelung

3.1 Zweitafelprojektion von Punkten (s. LEO S.82)

Wir erinnern zunächst an die in Abschnitt 1.6 erklärten Begriffe **Grundriss**, **Aufriss**, **Risskante**, **Ordner**. Die nächste Zeichnung zeigt einige Sonderlagen von Punkten:

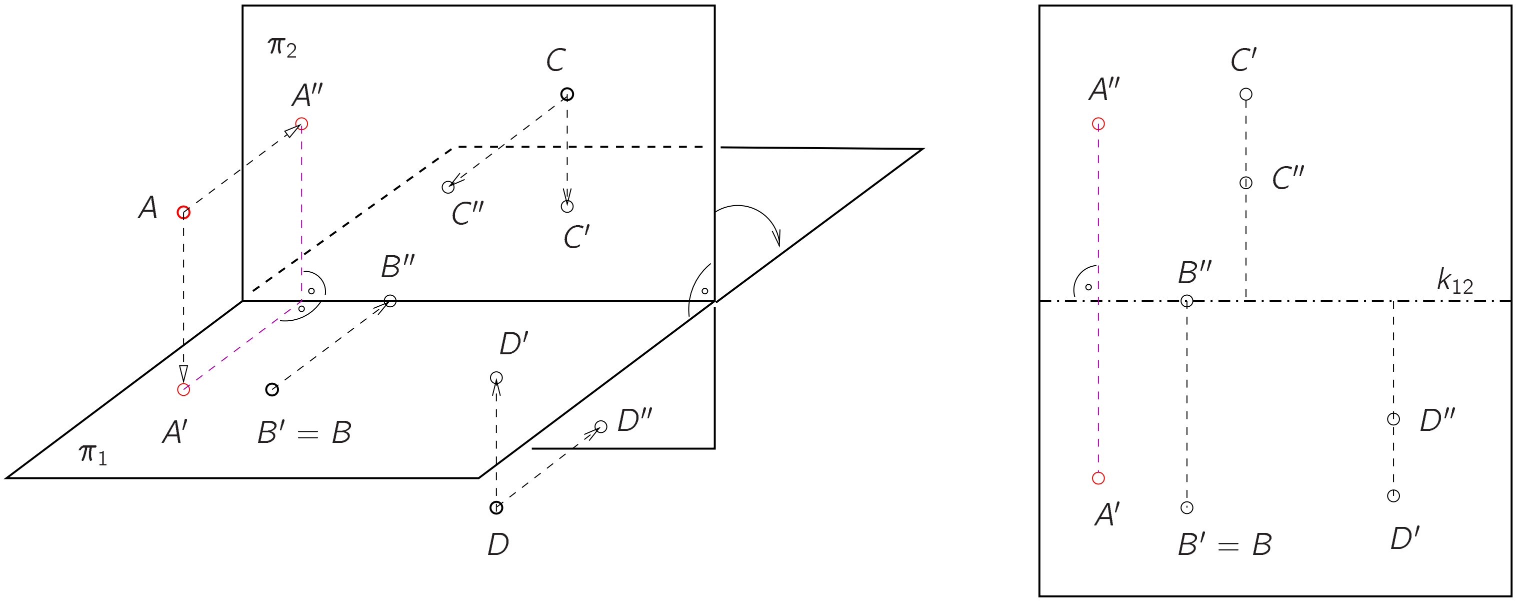


Abbildung 3.1: Zweitafelprojektion von Punkten

Beachte: Der Aufriss eines Punktes liegt nicht immer oberhalb der Risskante (s. Abb. 3.1). Analog muss der Grundriss eines Punktes nicht immer unterhalb der Risskante liegen !

3.2 Zweitafelprojektion von Geraden

(s. LEO S.83,89)

Die Projektion einer Gerade ist i.A. wieder eine Gerade:

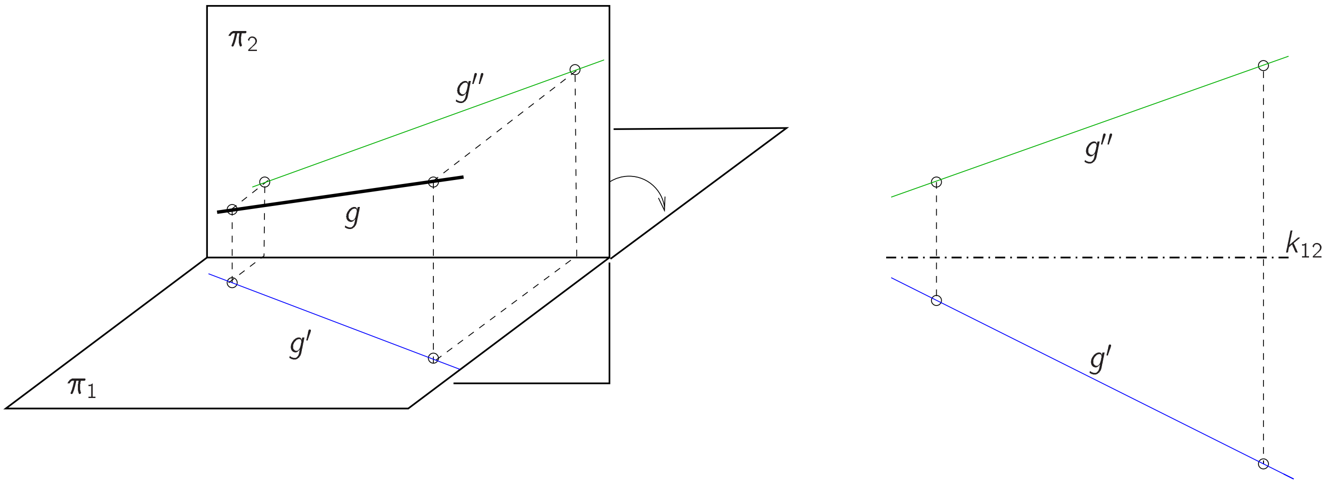


Abbildung 3.2: Zweitafelprojektion einer Gerade

Es gibt einige Sonderlagen für Geraden:

(a) Eine zu π_1 parallele Gerade heißt **Höhenlinie**, eine zu π_2 parallele **Frontlinie**. Eine **Hauptgerade** ist eine Höhenlinie oder eine Frontlinie. Eine für Maßaufgaben wichtige Eigenschaft von Hauptgeraden ist:

Der Grundriss einer Höhenlinie ist unverzerrt. Der Aufriss einer Frontlinie ist unverzerrt.

(b) Eine zu π_1 bzw. π_2 senkrechte Gerade heißt **Erst**–bzw. **Zweitprojizierende**.

(c) Eine Gerade, deren Grund– und Aufriss ein Ordner ist, heißt eine **gelehnte** Gerade.

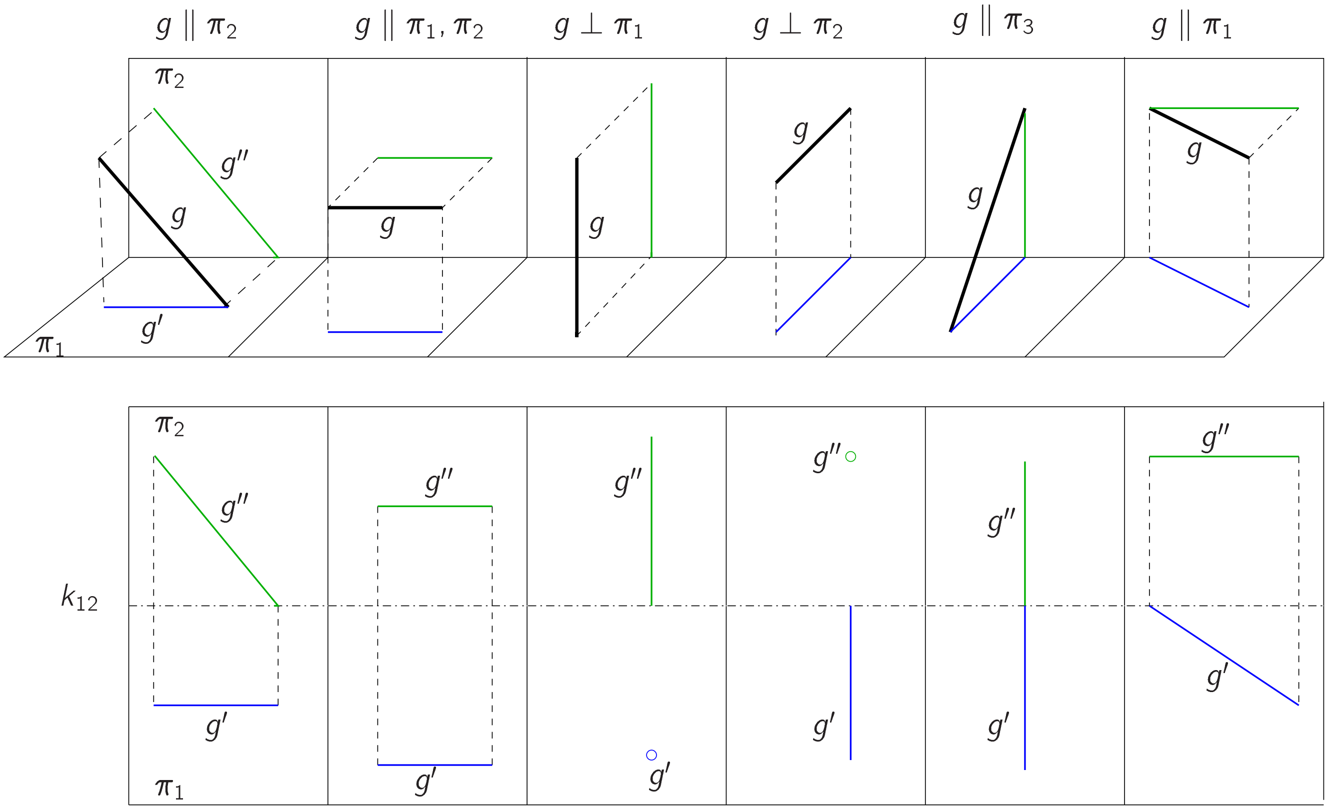


Abbildung 3.3: Sonderlagen von Geraden

Die Durchstoßpunkte einer Geraden g mit den Risstafeln nennt man **Spurpunkte** von g.

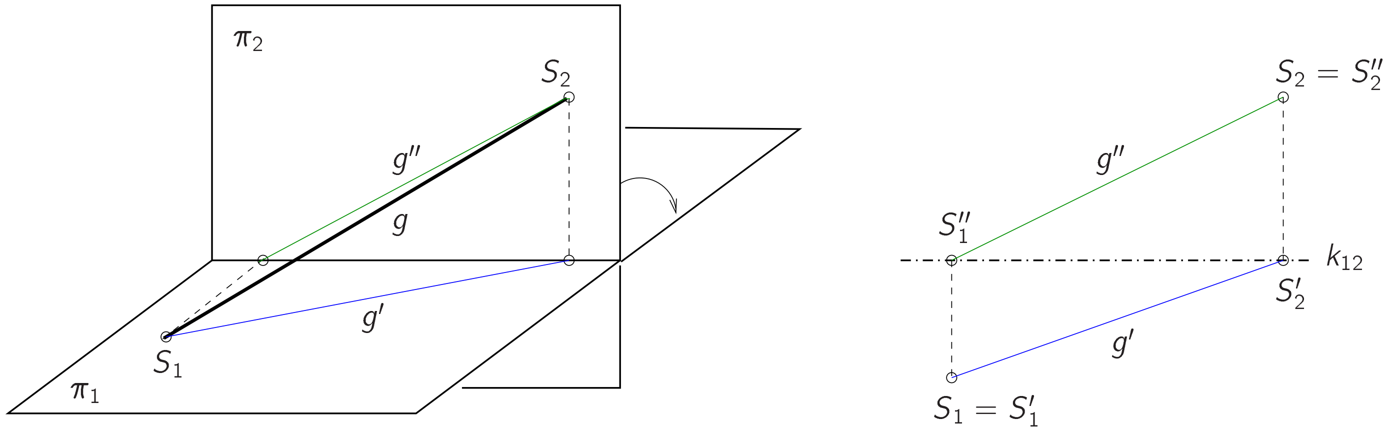


Abbildung 3.4: Spurpunkte einer Gerade

Die Risse paralleler Geraden sind parallel:

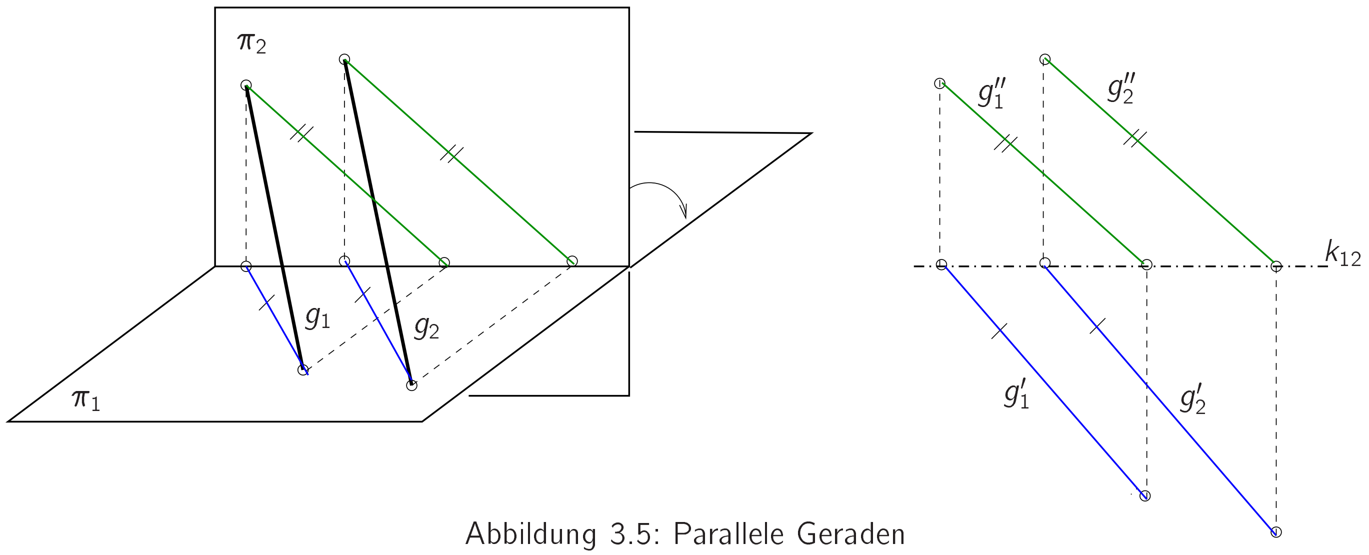


Abbildung 3.5: Parallele Geraden

Zwei Geraden g_1, g_2 haben einen Schnittpunkt, wenn $g_1' \cap g_2'$, $g_1'' \cap g_2''$ auf demselben Ordner liegen.
Zwei nicht parallele Geraden, die keinen Schnittpunkt haben, heißen **windschief**.

Schneiden sich zwei Geraden g_1, g_2 in einem Punkt S, so müssen S' (in π_1) und S'' (in π_2) auf einem Ordner liegen. Nur dann ist S', S'' das Bildpunktpaar eines beiden Geraden gemeinsamen Punktes (s. Abb. 3.6).

Sind zwei Geraden g_1, g_2 zueinander *windschief*, dann liegt der Schnittpunkt S' von g_1' und g_2' im Grundriss mit dem Schnittpunkt T'' (von g_1'' und g_2'') im Aufriss nicht auf einem Ordner (s. Abb. 3.7).

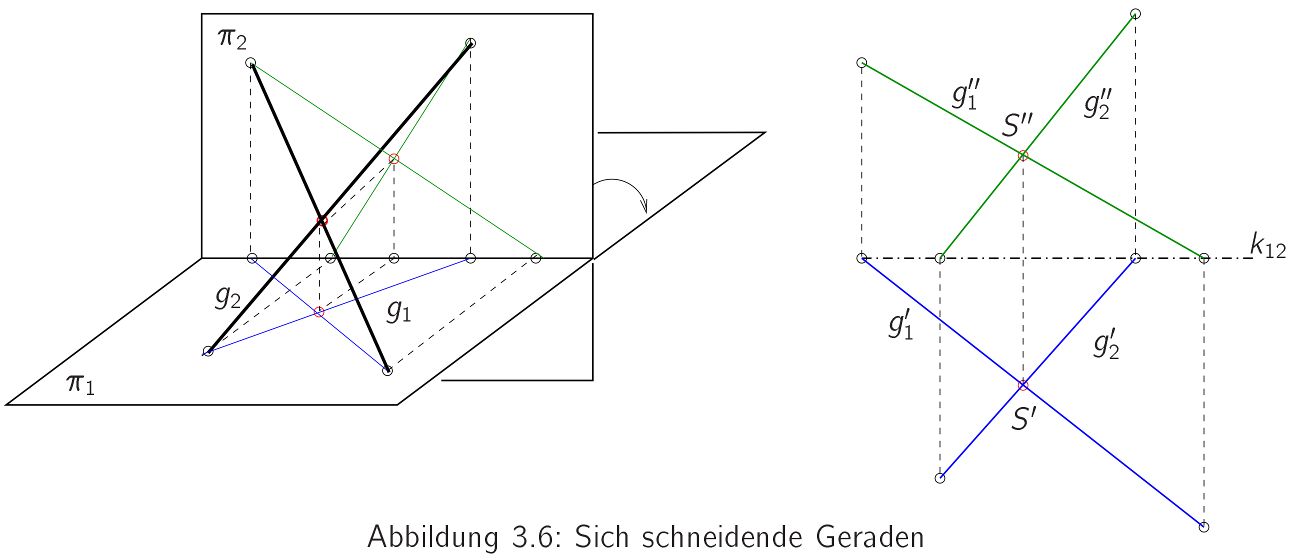


Abbildung 3.6: Sich schneidende Geraden

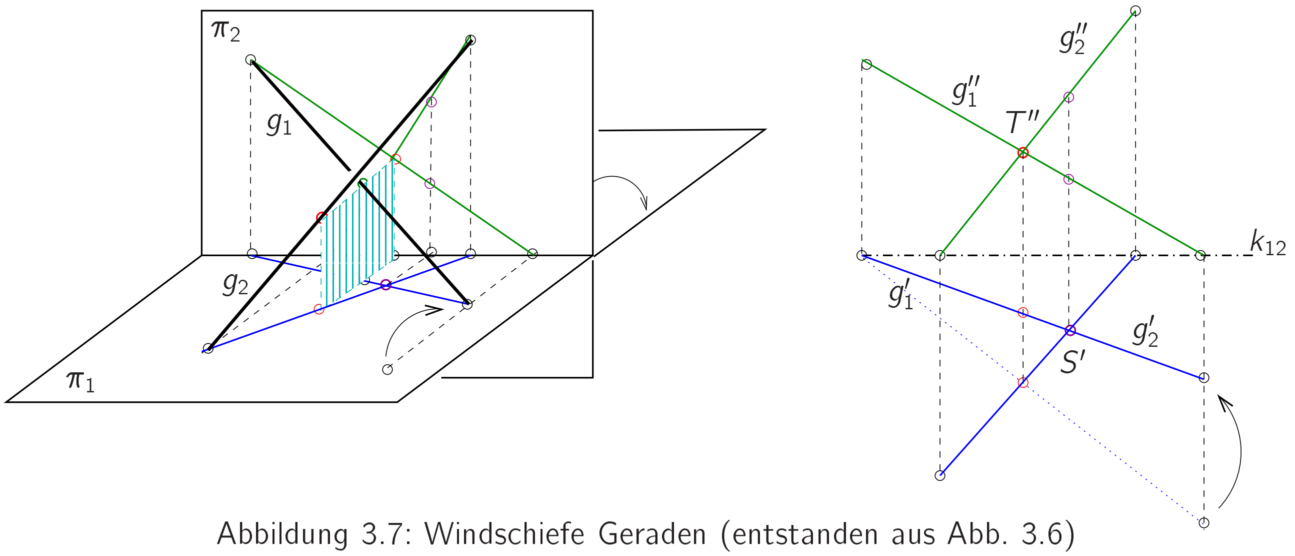


Abbildung 3.7: Windschiefe Geraden (entstanden aus Abb. 3.6)

Aufgabe 3.1 *Liegen die vier in Grund– und Aufriss gegebenen Punkte (Abb. 3.8) in einer Ebene?*

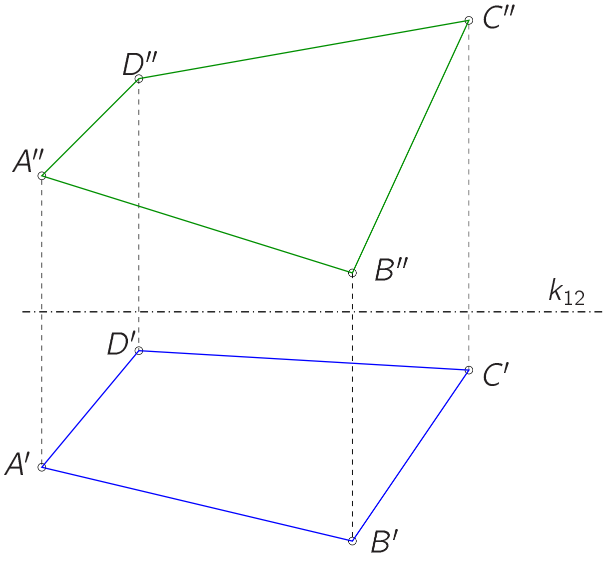


Abbildung 3.8: Ist das Viereck eben?

Aufgabe 3.2 *Durch die Grund– und Aufrisse der Geraden a, b, c, d ist ein Prisma gegeben (Abb. 3.9). Bestimme die Schnittfigur des Prismas mit der Grundrisstafel π_1.*

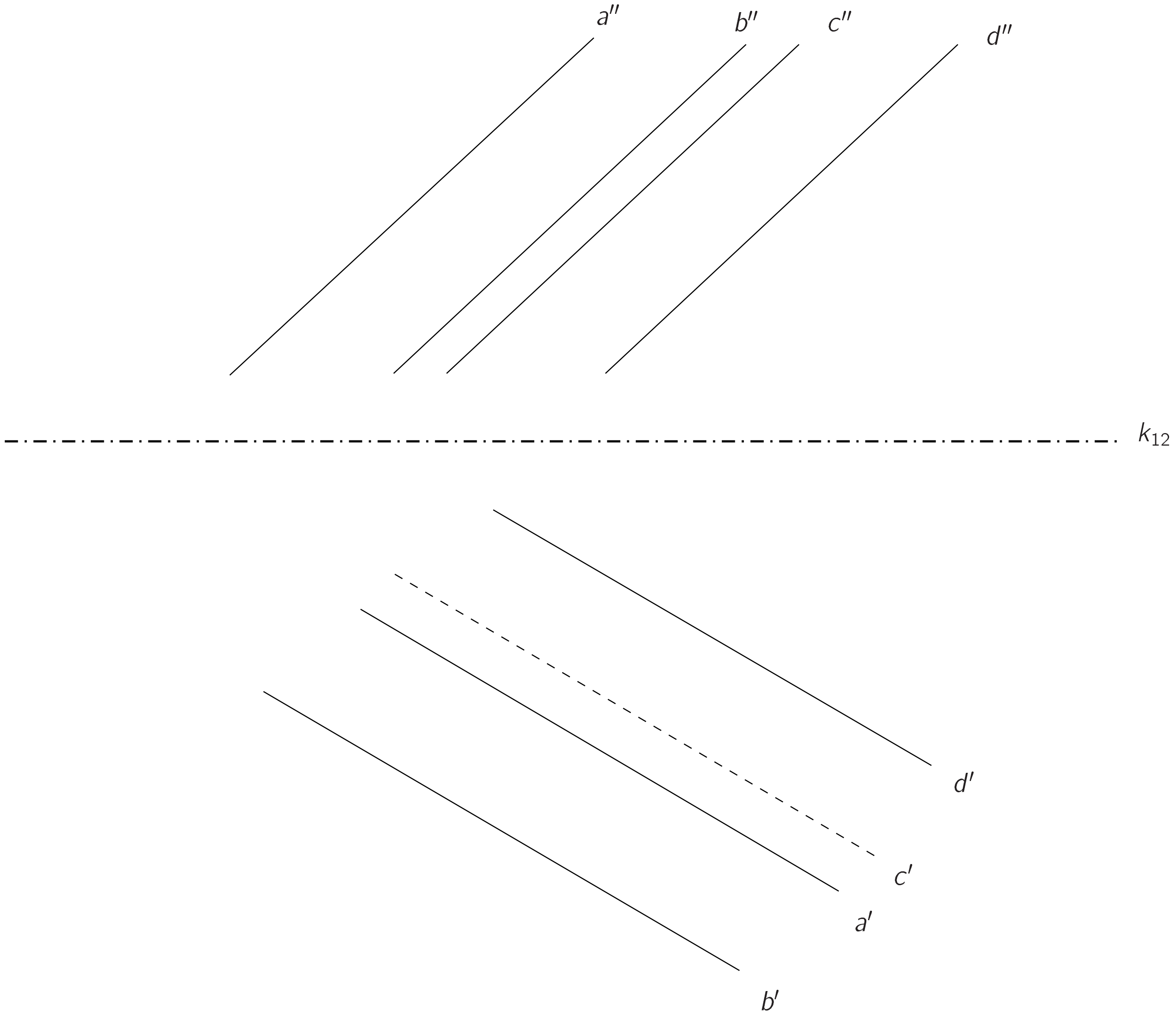


Abbildung 3.9: Grundriss–Spur eines Balkens

Bei sich schneidenden Geraden interessiert oft die wahre Größe des Schnittwinkels. Da ebene Figuren unverzerrt abgebildet werden, wenn sie parallel zur Bildtafel sind, gilt:

Der Schnittwinkel zweier Geraden erscheint in der Risstafel π_i unverzerrt, wenn beide Geraden parallel zu π_i sind.

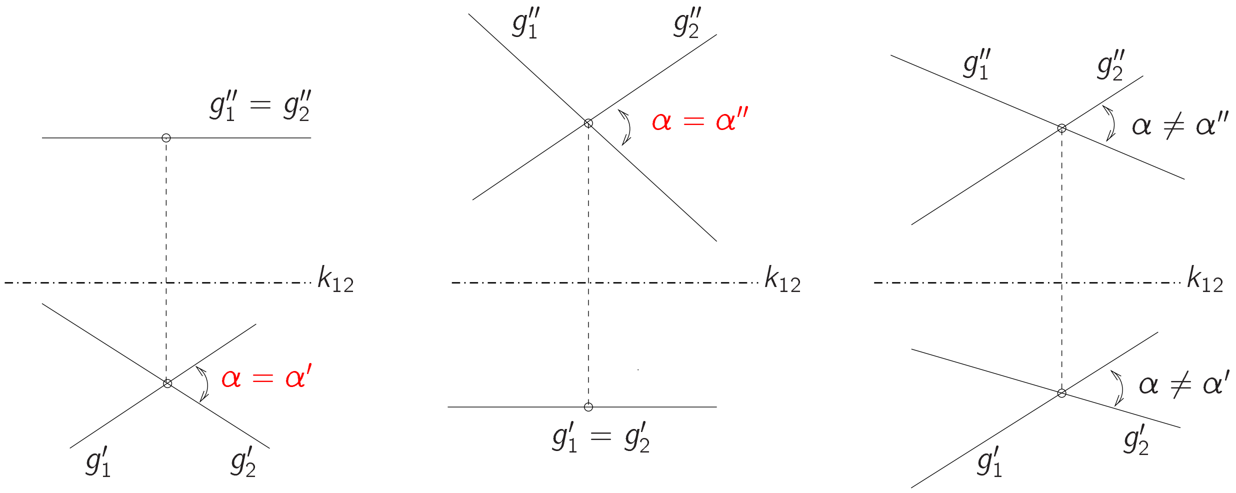


Abbildung 3.10: Winkel schneidender Geraden

Für den rechten Winkel kann die Voraussetzung abgeschwächt werden:

Ein **rechter Winkel** wird in der Risstafel π_i als rechter Winkel abgebildet, wenn (wenigstens) **ein** Schenkel parallel zu π_i ist.

Aufgabe 3.3 *Wo erscheinen in den folgenden Rissen eines Hauses (Abb. 3.11) Winkel in wahrer Größe?*

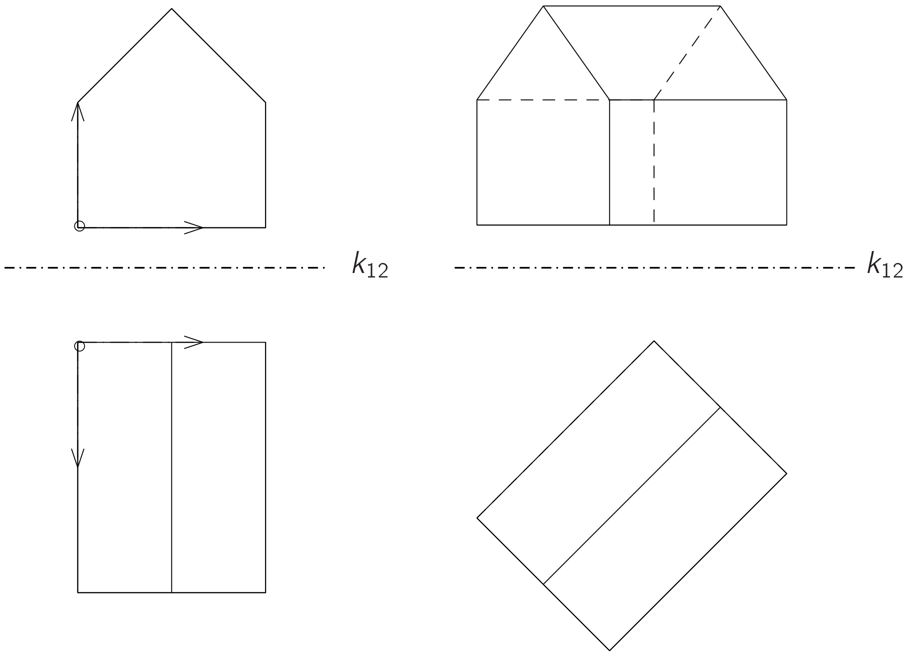


Abbildung 3.11: Wahre Winkel?

3.3 Zweitafelprojektion einer Ebene

(s. LEO S.91)

Eine Ebene kann im Raum festgelegt werden durch
(a) drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen,
(b) eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Gerade liegt,
(c) zwei parallele oder sich schneidende Geraden.

Aufgabe 3.4 *Durch die Punkte A, B, C ist eine Ebene ε gegeben (Abb. 3.12). Von einem Punkt $P \in \varepsilon$ ist P'' bekannt. Bestimme P'.*

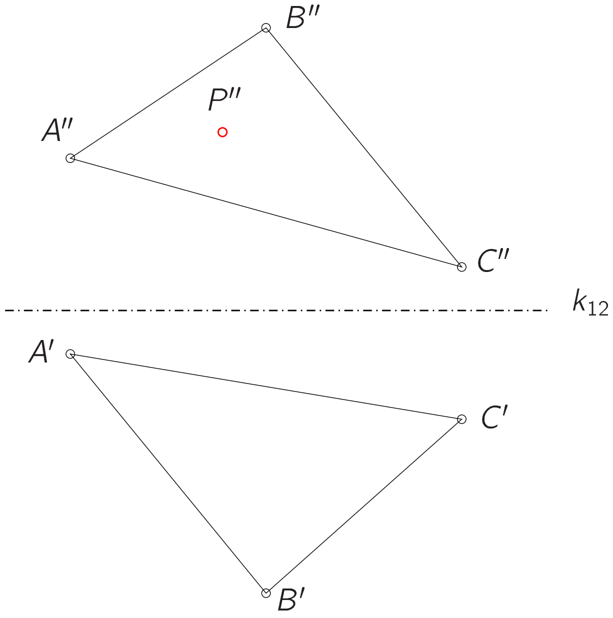


Abbildung 3.12: Punkt in einem Dreieck

Die Schnittgeraden einer Ebene ε mit den Risstafeln, falls sie existieren, heißen die **Spuren** von ε .

Aufgabe 3.5 *Die Ebene ε ist durch die Hauptgeraden h_1, h_2 durch den Punkt P gegeben (Abb. 3.13). Bestimme die Spuren von ε.*

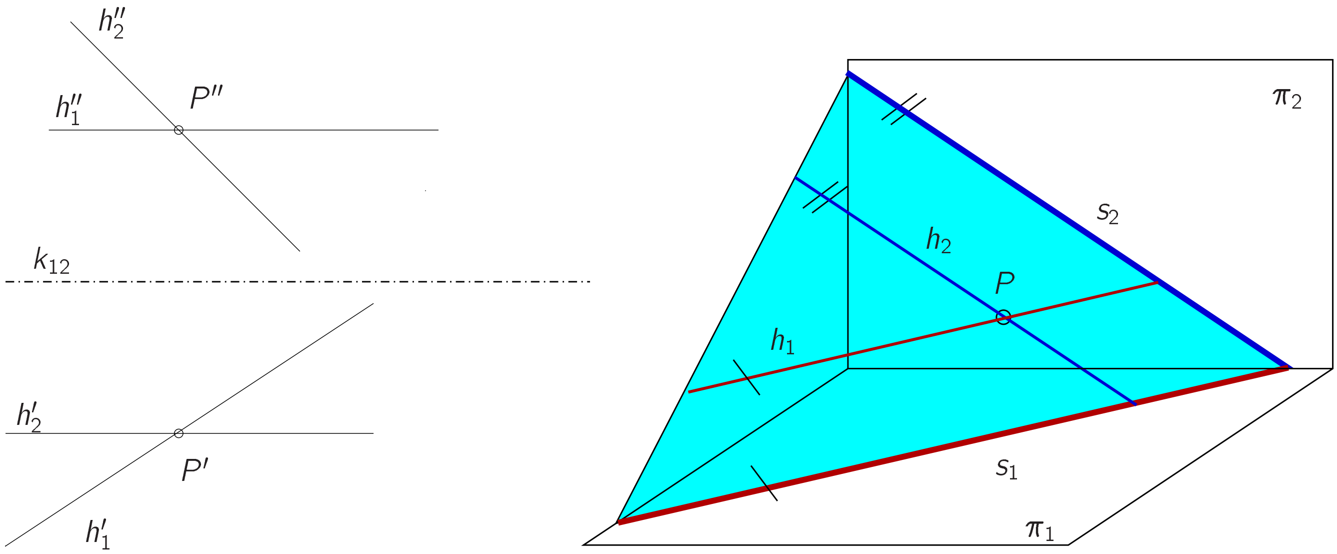


Abbildung 3.13: Spur einer Ebene

Aufgabe 3.6 *Die Ebene ε ist durch ihre Spuren s_1, s_2 gegeben (Abb. 3.14). Von dem Punkt P ist der Aufriss P'' bekannt. Bestimme P' und die Hauptgeraden durch P.*

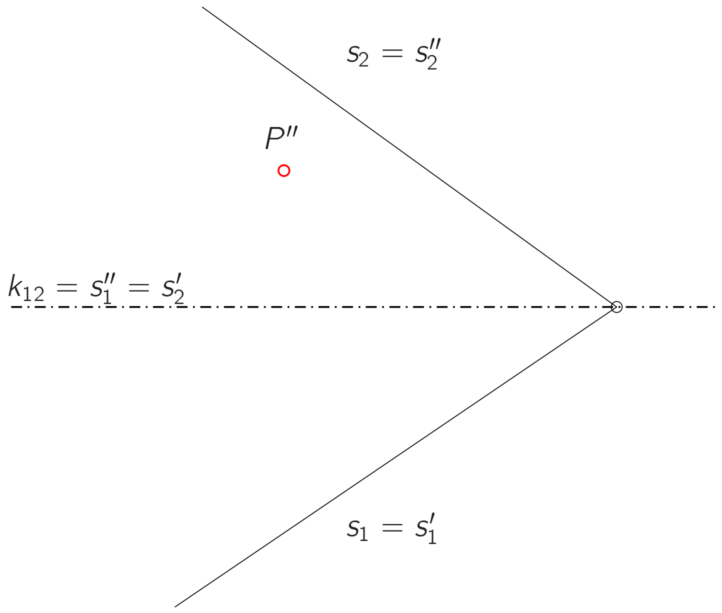


Abbildung 3.14: Punkt und Hauptgeraden in einer Ebene

Aufgabe 3.7 *Gegeben: Satteldach eines Hauses und der Grundriss zweier Reklamebuchstaben auf einer Dachfläche (Abb. 3.15). Gesucht: Aufriss der Buchstaben.*

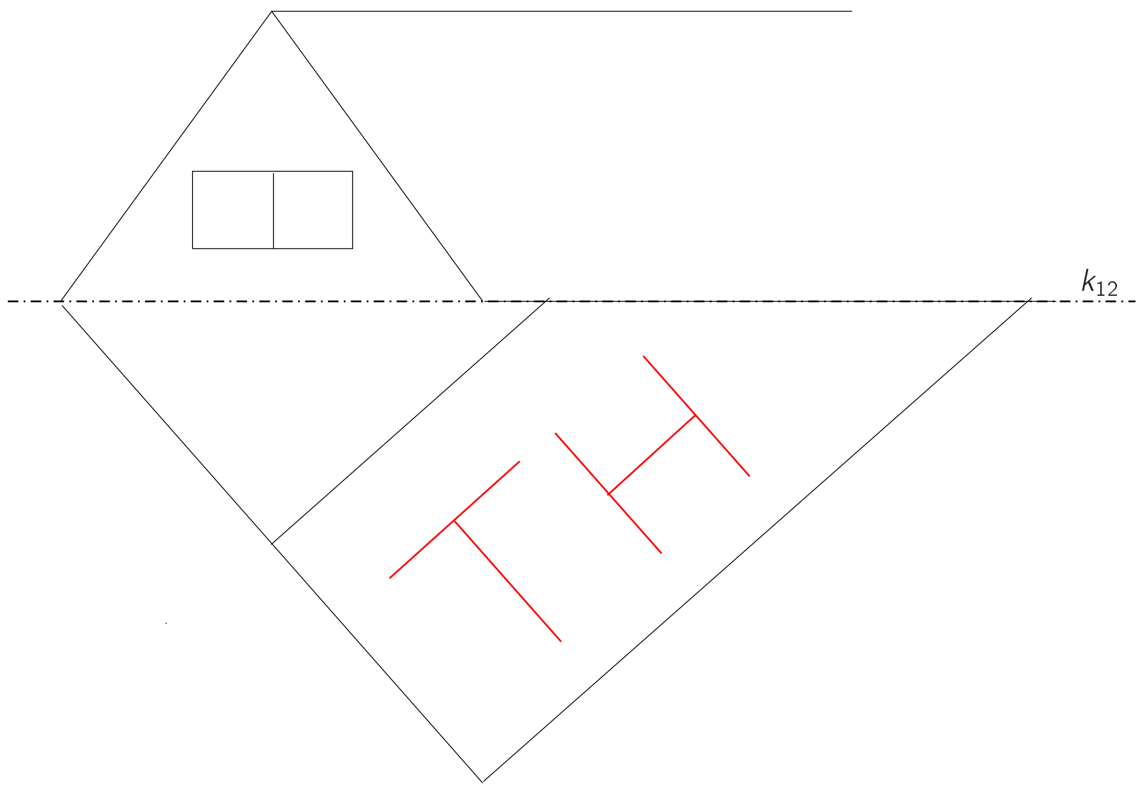


Abbildung 3.15: Reklame auf einem Dach

Einige Sonderlagen für Ebenen (Abb. 3.16):

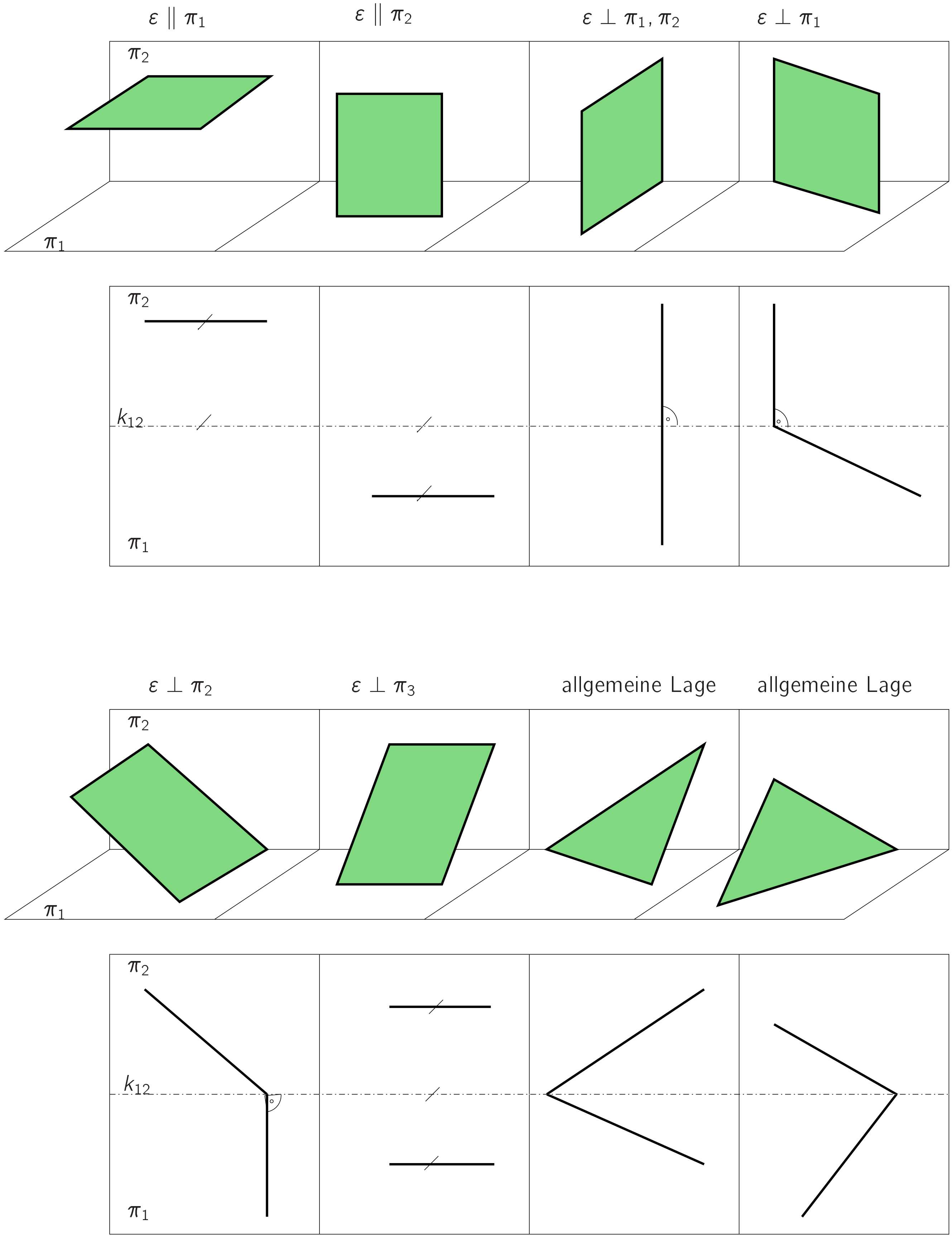


Abbildung 3.16: Sonderlagen von Ebenen

3.4 Weitere Risse (Umprojektionen)

(s. LEO S.96)

Man kommt oft nicht mit Grund- und Aufriss aus, wenn z.B.

(a) gelehnte Lagen auftreten, da dann ohne Zusatzangaben Projektionen nicht eindeutig sind, oder wenn

(b) Grund- und Aufriss nicht „anschaulich“ sind.

Mit Hilfe weiterer Risstafeln lassen sich in Sonderlagen Konstruktionen (z.B. Antragen eines Winkels oder einer Länge) leichter ausführen.
Im Folgenden heißen zwei Risse (senkrechte Parallelprojektionen) einander **zugeordnet**, wenn die zugehörigen Risstafeln senkrecht zueinander stehen.
Prinzip: Man führt eine neue Risstafel π_3 so ein, dass sie entweder π_1 oder π_2 zugeordnet ist. In jedem Fall wird π_3 um die neue Risskante k_{13} oder k_{23} in die Zeichenebene geklappt.

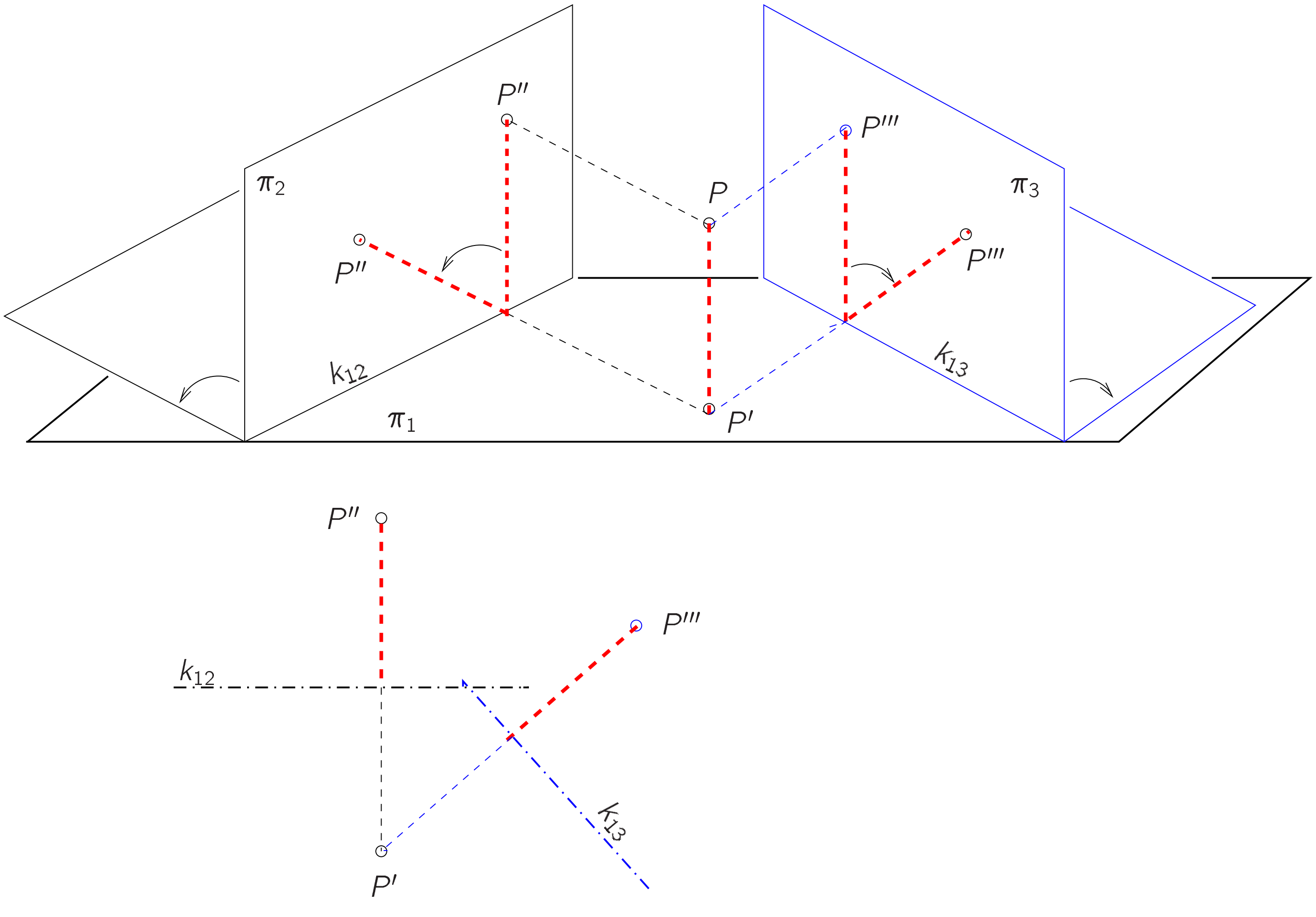


Abbildung 3.17: Umprojektion eines Punktes

Durchführung, falls π_3 der Tafel π_1 zugeordnet ist.
In diesem Fall kann man π_3 als eine neue Aufrisstafel auffassen.

(1) Zeichne die neue Risskante k_{13}.

(2) Der (neue) Riss P''' des Punktes P liegt auf der Senkrechten zu k_{13} durch P' (neuer Ordner) und hat denselben Abstand von der neuen Risskante k_{13} wie P'' (der alte Aufriss) von (der alten Risskante) k_{12}.

Der neue Riss in π_3 ist über die Risskante k_{13} dem Riss in π_1 zugeordnet.

Aufgabe 3.8 *Stelle durch Umprojektion ein anschauliches Bild eines Hauses her (Abb. 3.18).*

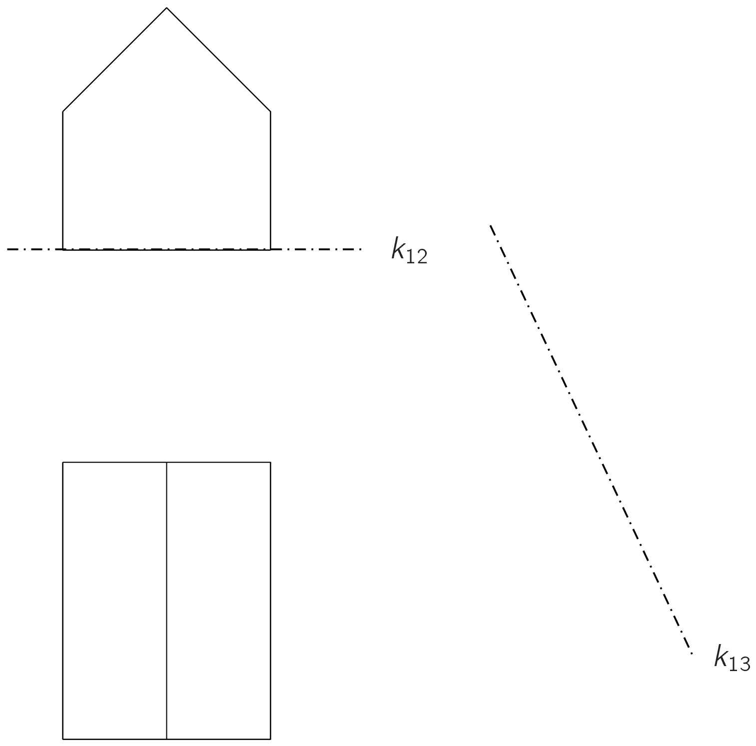


Abbildung 3.18: Umprojektion eines Hauses

Die Durchführung für den Fall, dass π_3 der Aufrisstafel zugeordnet ist, verläuft analog (Abb. 3.19).

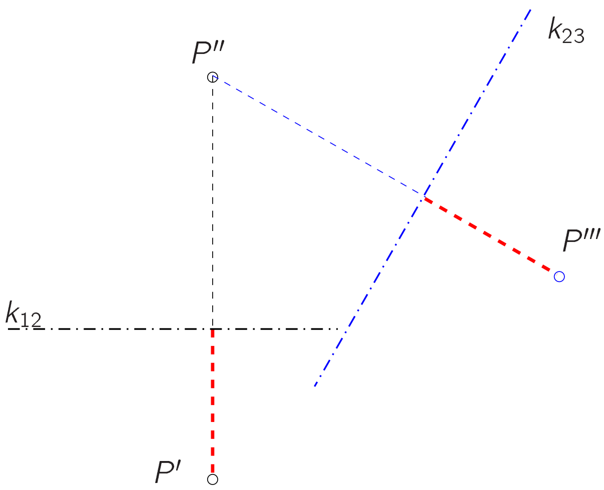


Abbildung 3.19: Umprojektion eines Punktes (Grundriss wird ersetzt)

Aufgabe 3.9 *Stelle durch Umprojektion ein anschauliches Bild einer Pyramide her (Abb. 3.20).*

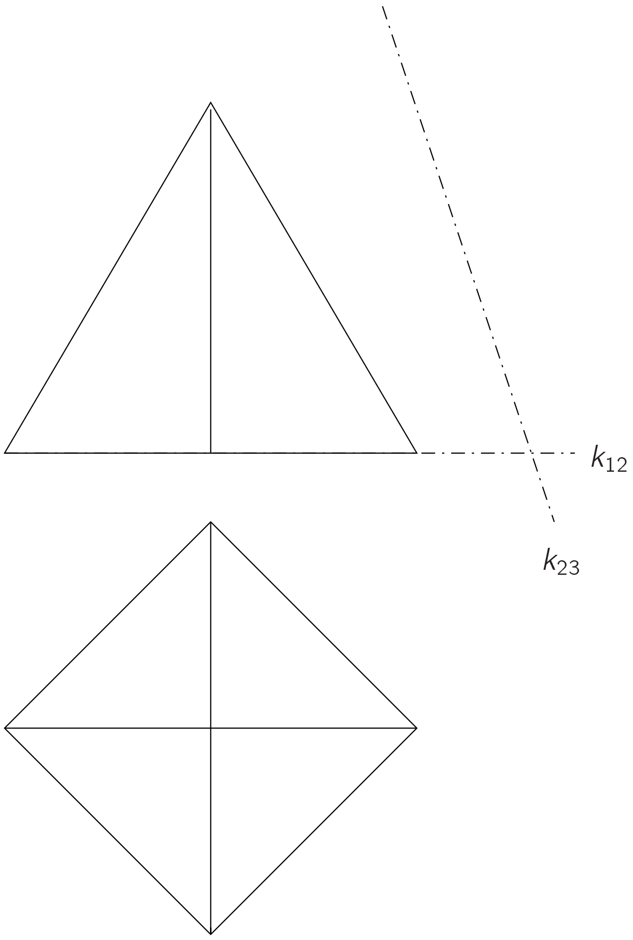


Abbildung 3.20: Umprojektion einer Pyramide (Grundriss wird ersetzt)

Umprojektionen können mehrfach hintereinander durchgeführt werden. Dabei muss man auf folgendes achten:
(a) Man muss von zwei **zugeordneten Rissen** ausgehen.
(b) Aus dem **wegfallenden** Riss muss der in **(2)** notwendige Abstand zur Risskante entnommen werden.

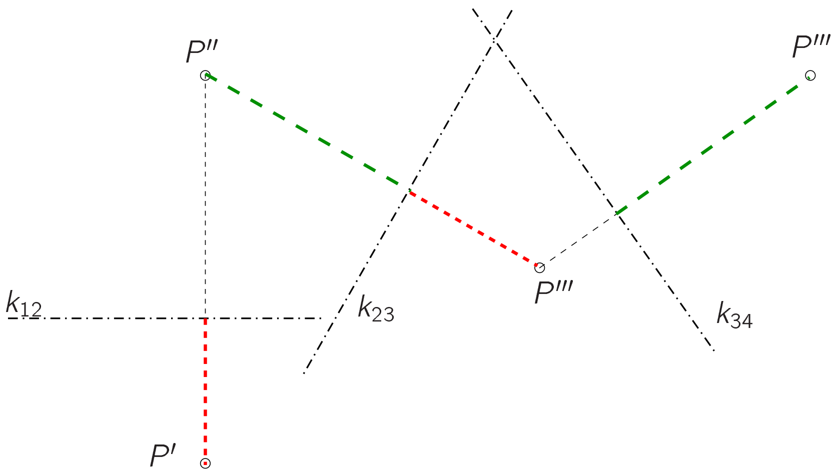


Abbildung 3.21: Mehrfachumprojektion eines Punktes

3.5 Grundaufgaben

3.5.1 Schnittpunkt (Durchstoßpunkt) Gerade–Ebene

(s. LEO S.92)

Gegeben: Gerade g durch Grundriss g' und Aufriss g'',
Ebene ε durch drei Punkte A, B, C in Grund- und Aufriss (Aufgabe 3.10).
Gesucht: Schnittpunkt $D = g \cap \varepsilon$.
Lösungs**idee**: Es sei μ die zu π_1 (oder π_2) senkrechte Ebene, die g enthält. Sie schneidet ε in der Schnittgeraden $s = \mu \cap \varepsilon$. Dann gilt für den gesuchten Durchstoßpunkt $D = s \cap g$.

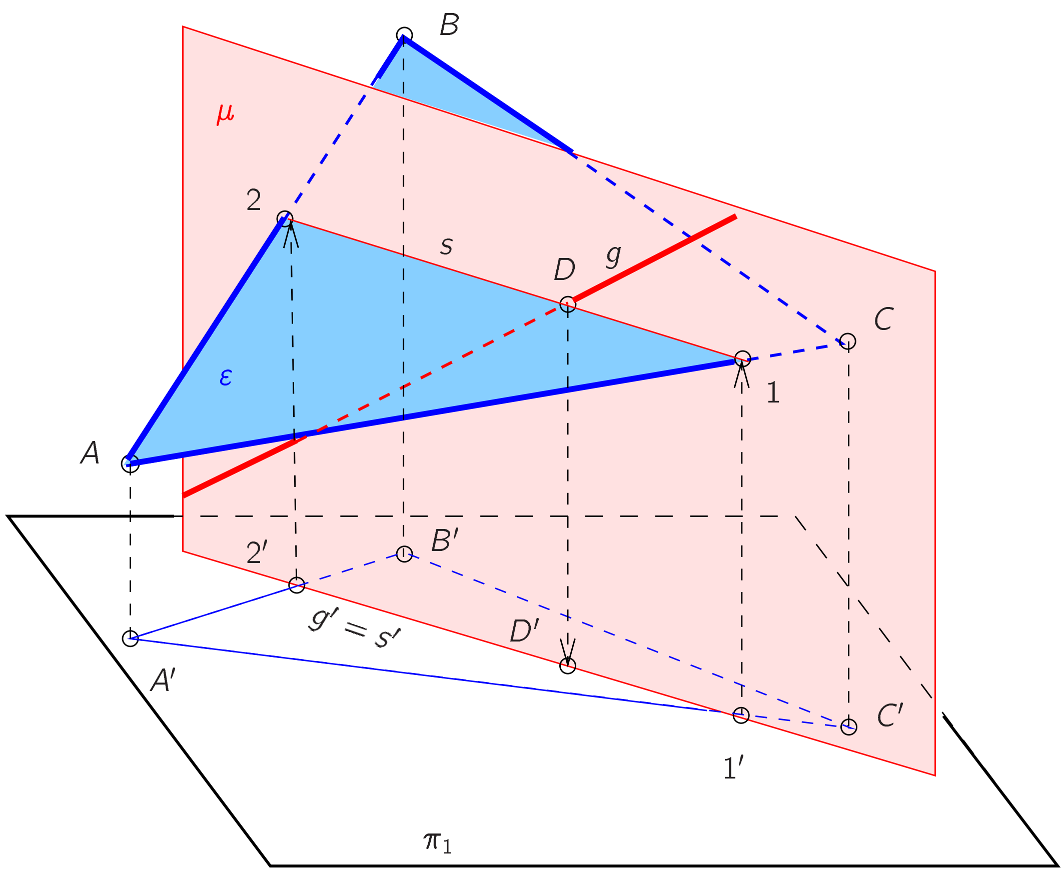


Abbildung 3.22: Schnitt Gerade–Ebene

Durchführung, falls $\mu \perp \pi_1$ gewählt ist:

(1) Wähle zwei Geraden e_1, e_2 der Ebene ε, die nicht zu g' parallel sind. e_1', e_1'', e_2', e_2'' seien ihre Risse.
(2) Der Schnitt von g' mit e_1' bzw. e_2' liefert E_1' bzw. E_2'.
(3) Bestimme (mit Ordnern) E_1'', E_2'' auf e_1'', e_2''.
(4) Die Gerade durch E_1'' und E_2'' ist der Aufriss s'' der Hilfsgeraden s.
(5) $D'' = s'' \cap g''$ ist der Aufriss des Durchstoßpunktes D.
(6) D' ist der Schnittpunkt des Ordners durch D'' mit g'.

Die Durchführung für den Fall, dass $\mu \perp \pi_2$ gewählt wurde, verläuft analog; man muss nur die Rollen von Grund- und Aufriss vertauschen.

Aufgabe 3.10 *Bestimme den Schnittpunkt einer Gerade mit der durch ein Dreieck gegebenen Ebene (Abb. 3.23).*

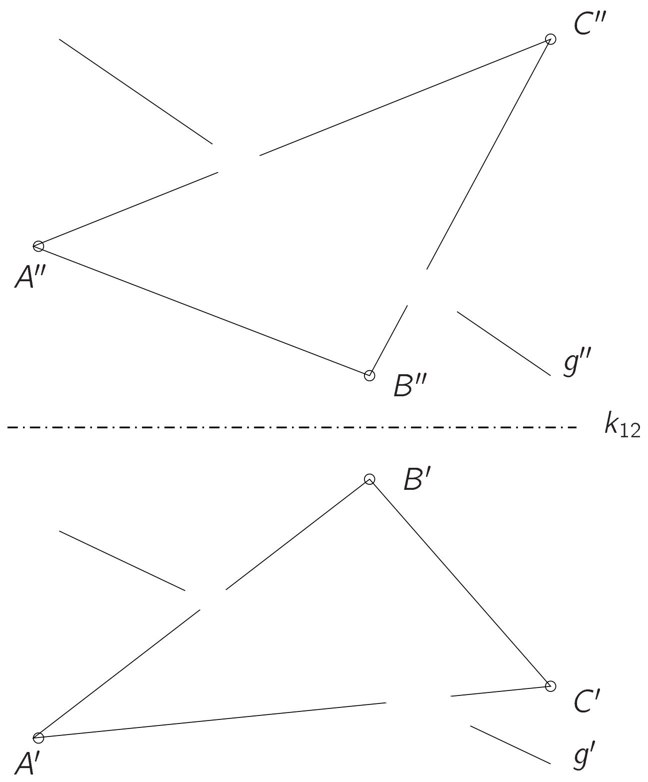


Abbildung 3.23: Schnitt Gerade–Ebene

Aufgabe 3.11 *In Grund- und Aufriss ist ein dreikantiger Balken und ein ebenes Viereck gegeben (Abb. 3.24). Bestimme Grund- und Aufriss der Schnittfigur.*

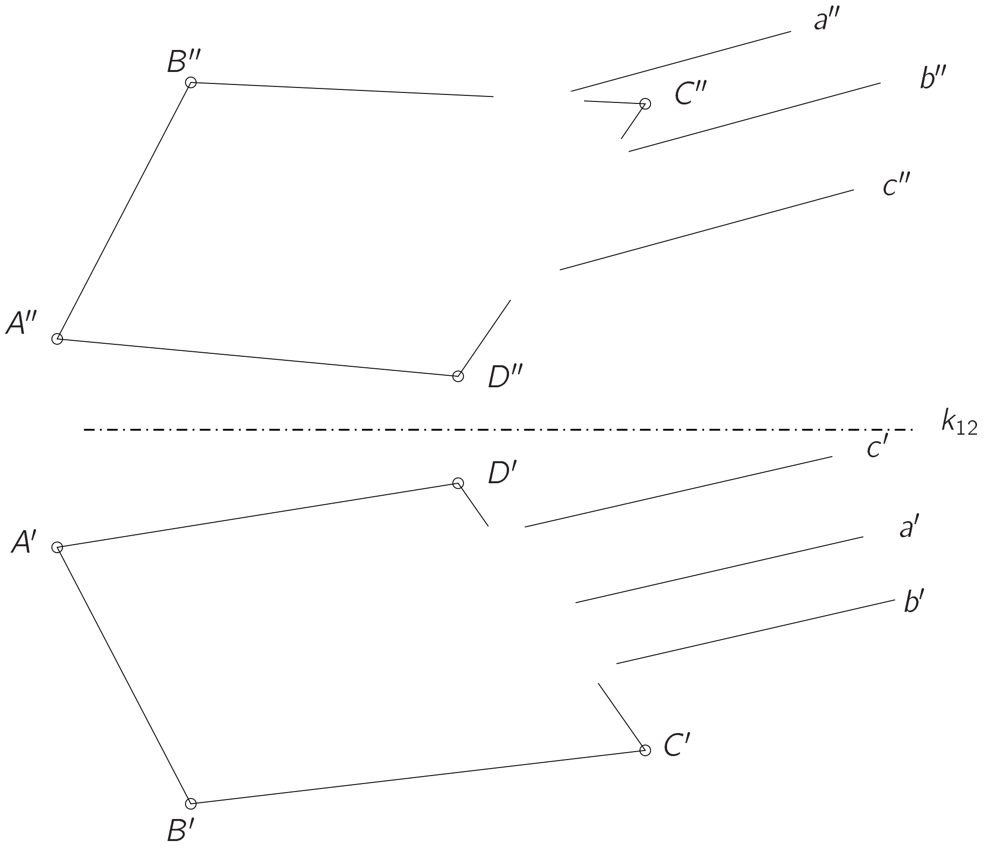


Abbildung 3.24: Schnitt Balken–Ebene

Die Idee, den Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene mit Hilfe einer senkrechten Hilfsebene zu bestimmen, lässt sich direkt bei der Kontruktion eines Schattenpunktes auf eine geneigte Ebene verwenden.

Aufgabe 3.12 *Gegeben ist ein axonometrisches Bild (Kavalierperspektive) eines Hochhauses (Quader), zweier Fabrikhallen mit schrägen Dächern, sowie paralleles Licht durch die Lichtrichtung ℓ und den Schattenwurf einer Kante (Abb. 3.25). Zeichne den Schatten.*

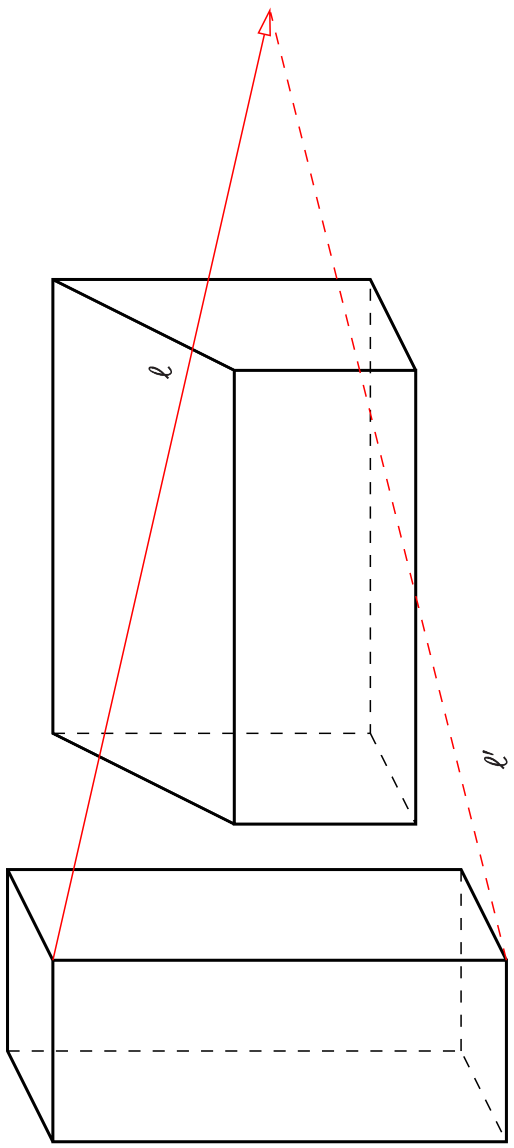


Abbildung 3.25: Schatten auf geneigte Ebenen bei parallelem Licht

3.5.2 Wahre Länge einer Strecke

(s. LEO S.100)

Gegeben: Strecke $\overline{AB}$ in Grund- und Aufriss.
Gesucht: Die wahre Länge dieser Strecke.

Lösungs**idee**: Eine Strecke erscheint im Aufriss (bzw. Grundriss) in wahrer Länge, wenn die Strecke zur Aufrisstafel (bzw. Grundrisstafel) parallel ist.
Wir geben hier zwei Möglichkeiten an, die Strecke „tafelparallel" zu machen:

1. Möglichkeit:

Man dreht die Strecke um eine zur Grundrisstafel (bzw. Aufrisstafel) senkrechte Achse bis sie parallel zur Aufrisstafel (bzw. Grundrisstafel) ist.

Durchführung der Drehung um eine zu π_1 senkrechte Achse durch B:

(1) Drehe A' um B', bis die gedrehte Strecke parallel zu k_{12} ist. Der gedrehte Punkt sei $\tilde{A}'$ (Grundriss von $\tilde{A}$, dem um B gedrehten Punkt A).
(2) $\tilde{A}''$ liegt auf dem Ordner durch $\tilde{A}'$ und auf der Parallelen durch A'' zur Risskante (bei der Drehung bleibt $\tilde{A}$ auf der gleichen Höhe wie A !).
(3) $|\tilde{A}''B''|$ ist die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$.

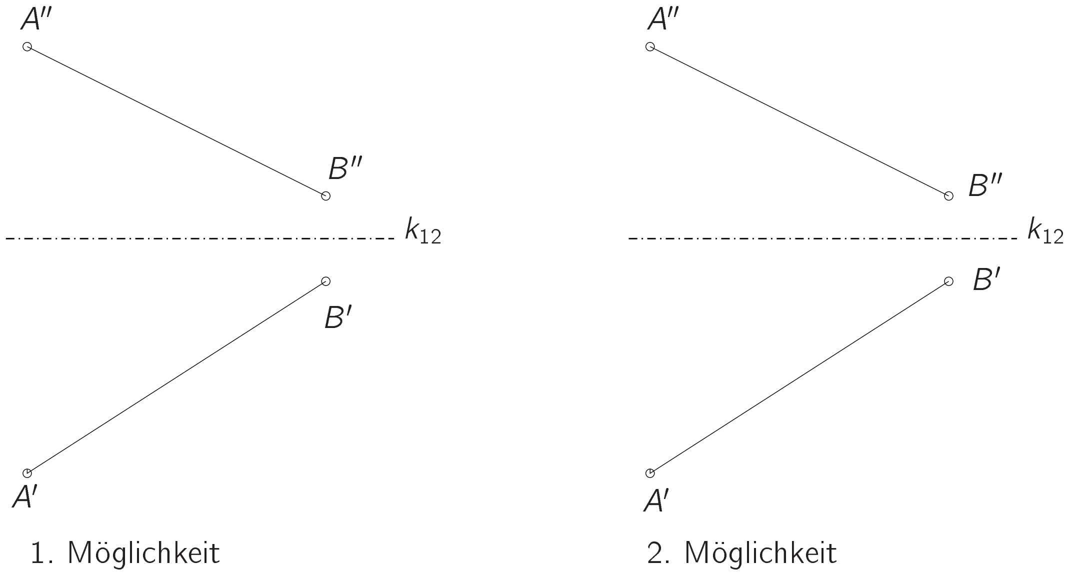


Abbildung 3.26: Wahre Länge einer Strecke

2. Möglichkeit:

Man legt durch die Strecke $\overline{AB}$ eine zu π_1 (bzw. π_2) senkrechte Ebene μ und dreht μ um eine Höhenlinie (Frontlinie) in eine horizontale (senkrechte) Lage.

Durchführung der Drehung um eine Höhenlinie durch B:

(1) Zeichne den Aufriss C'' des Punktes C, der senkrecht unter A liegt und dieselbe Höhe wie B hat. Es ist $C' = A'$.
(2) Man drehe das rechtwinklige Dreieck A, B, C um die Kathete $\overline{BC}$ um 90° parallel zu π_1, indem man in $A'(= C')$ senkrecht die Strecke $\overline{C''A''}$ anträgt. Die Hypothenuse des entstandenen Dreiecks ist die wahre Länge der Strecke $\overline{A, B}$.

(Entspricht der Einführung einer neuen Risstafel parallel zur Strecke $\overline{AB}$.)

Aufgabe 3.13 *Von einem Punkt P und einer Geraden g sind Grund- und Aufriss gegeben (Abb. 3.27). Trage auf g eine in P beginnende Strecke der Länge 3 cm ab.*

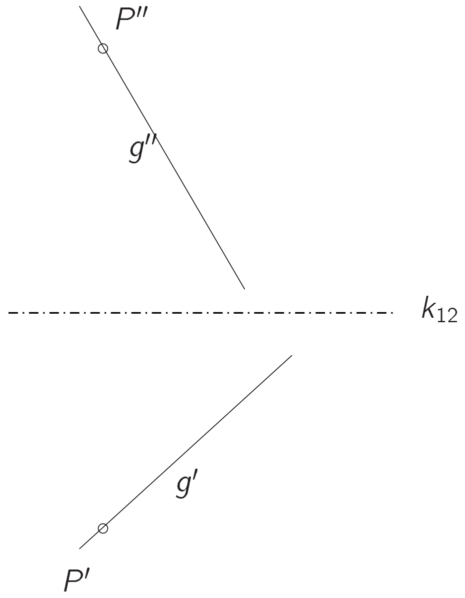


Abbildung 3.27: Antragen einer wahren Länge einer Strecke

Aufgabe 3.14 *Gegeben: Satteldach, Kaminkopf (K) und die Richtung der Sonnenstrahlen (S) (Abb. 3.28). Gesucht: a) Schnitt des Kamins mit der Dachfläche. b) Schatten des Kamins auf der Dachfläche. c) Wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$ und die Dachneigung α.*

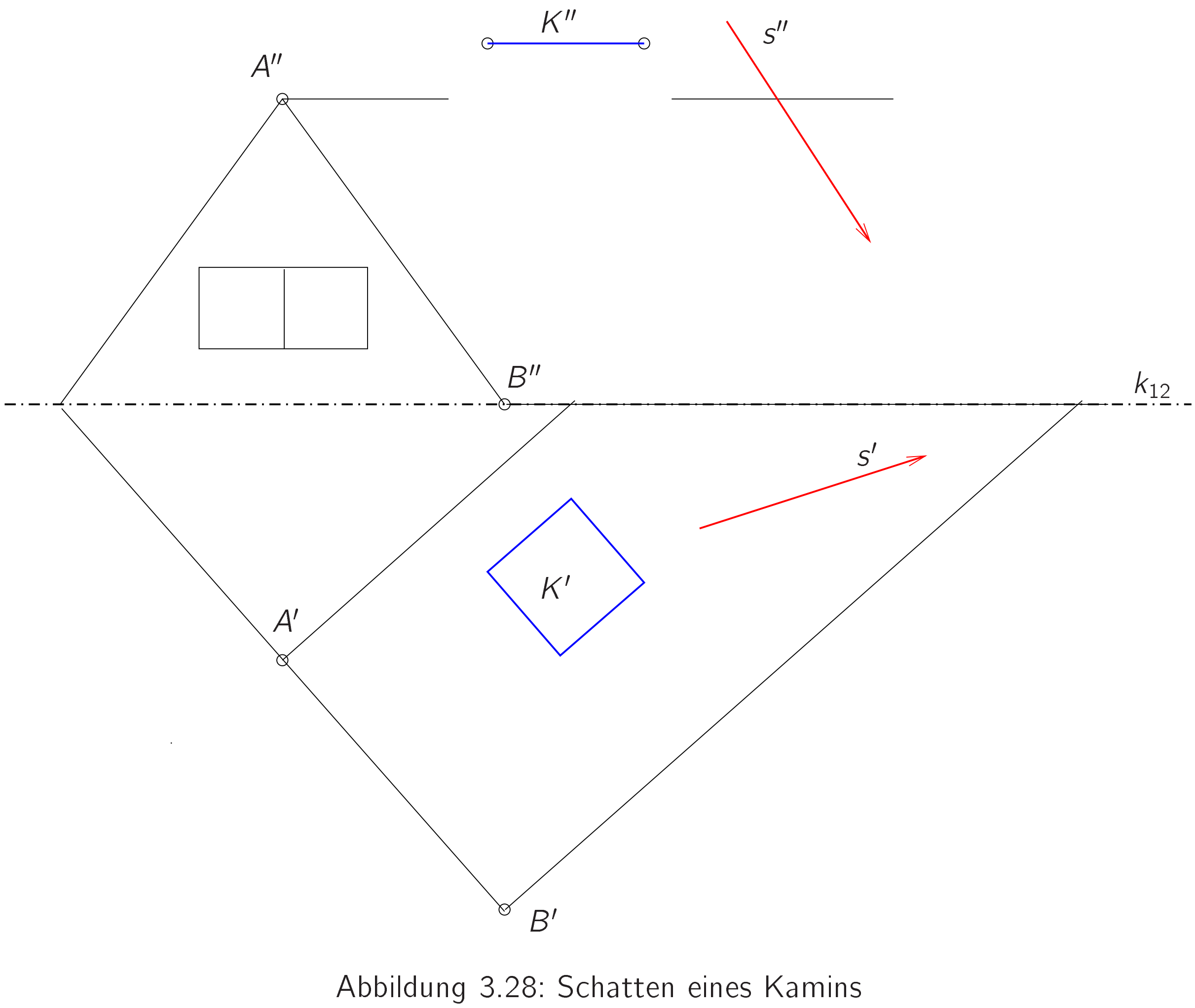


Abbildung 3.28: Schatten eines Kamins

3.5.3 Wahre Gestalt einer ebenen Figur (s. LEO S.103)

Gegeben: Das Dreieck A, B, C in Grund- und Aufriss.
Gesucht: Die Wahre Gestalt des Dreiecks.

Lösungs**idee**: Einführung einer Risstafel π_3 senkrecht zum Dreieck. Der Riss des Dreiecks erscheint in π_3 als Strecke. Jetzt lässt sich eine Risstafel π_4 parallel zu dem Dreieck einführen und das Dreieck erscheint in π_4 in wahrer Gestalt.

Durchführung, falls π_3 der Grundrisstafel zugeordnet wird:

(1) Bestimme eine Höhenlinie h des Dreiecks.
(2) Neue Risskante $k_{13} \perp h'$. Umprojektion des Dreiecks.
A''', B''', C''' liegen auf einer Geraden d'''.
(3) Neue Risskante $k_{34} || d'''$. Der neue Riss zeigt das Dreieck in wahrer Gestalt.

Aufgabe 3.15 *Bestimme die wahre Gestalt eines in Grund– und Aufriss gegebenen Dreiecks (Abb. 3.29).*

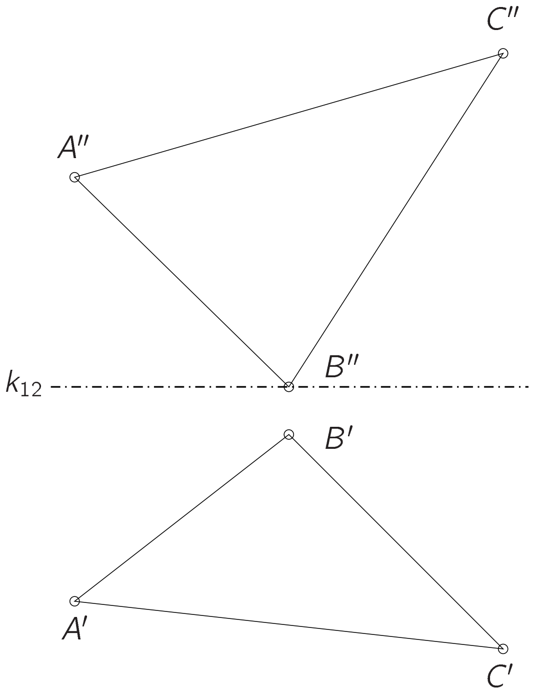


Abbildung 3.29: Wahre Gestalt eines Dreiecks

3.5.4 Lot auf eine Ebene

(s. LEO S.105)

Gegeben: Ebene ε durch drei Punkte A, B, C und Punkt P.
Gesucht: Lot l auf ε durch P.

Lösungs**idee**: Ein rechter Winkel erscheint in einer senkrechten Parallelprojektion wieder als rechter Winkel, wenn ein Schenkel parallel zur Bildtafel ist. Höhenlinien (bzw. Frontlinien) sind parallel zu π_1 (bzw. π_2).

Durchführung:

(1) Zeichne die Höhenlinie h und die Frontlinie f von ε durch (z.B.) C in Grund- und Aufriss.

(2) Das Lot von P' auf h' ist der Grundriss l' und das Lot von P'' auf f'' ist der Aufriss l'' des Lotes l von P auf ε.

Aufgabe 3.16 *Bestimme den Fußpunkt des Lotes vom Punkt P auf die durch ein Dreieck bestimmte Ebene (Abb. 3.30, links).*

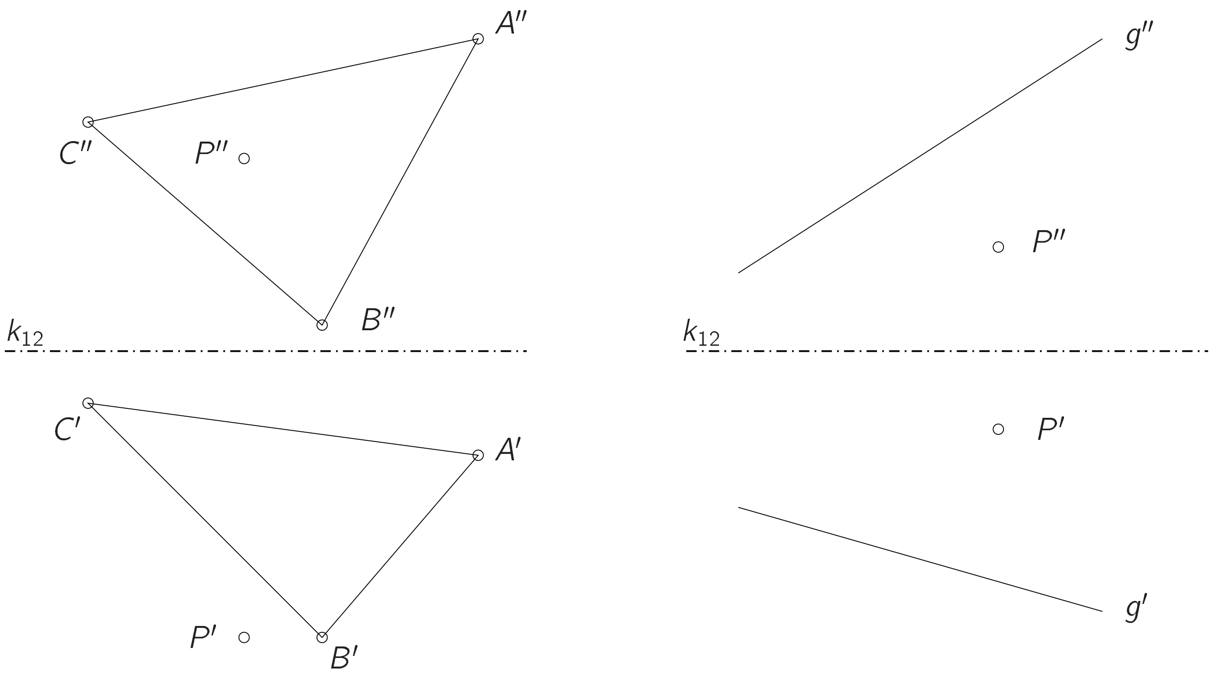


Abbildung 3.30: Lot auf Ebene bzw. Lotebene

Aufgabe 3.17 *:*

Gegeben: Gerade g, Punkt P, $P \notin g$ (Abb. 3.30 rechts).
Gesucht: Die Hauptgeraden der Lotebene μ zu g durch P.

3.6 Einschneideverfahren bei senkrechter Axonometrie

(s. LEO S.199,204,208)

Bei der **senkrechten** Axonometrie stehen die Projektionsstrahlen senkrecht zur Bildtafel. Da senkrechte Projektionen auf die Koordinatenebenen meistens nur unanschauliche Bilder liefern (z.B. bei einem Haus: Grund– Auf– und Seitenriss) machen wir hier die folgende Annahme:

Keine Koordinatenebene ist **parallel** zur Bildtafel !!

Wesentlich für die Orientierung der Risse, um ein **senkrecht** axonometrisches Bild beim Einschneiden zu erhalten, ist das *Spurdreieck* S_x, S_y, S_z. Es besteht aus den Schnittpunkten der Bildtafel mit den Koordinatenachsen (s. Fig. 3.31).

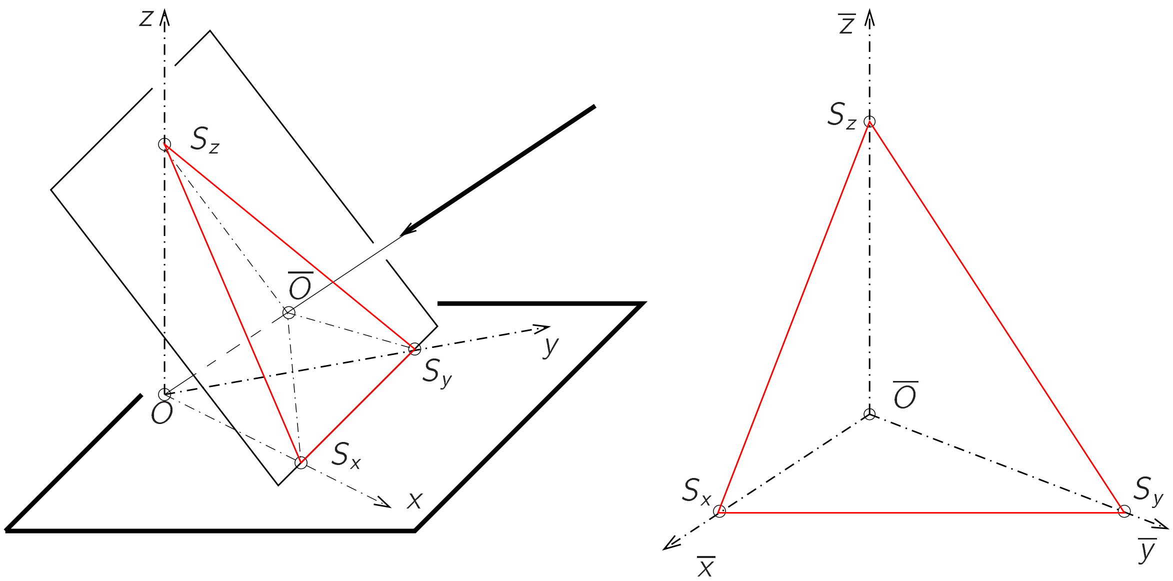


Abbildung 3.31: Senkrechte Axonometrie: Spurdreieck

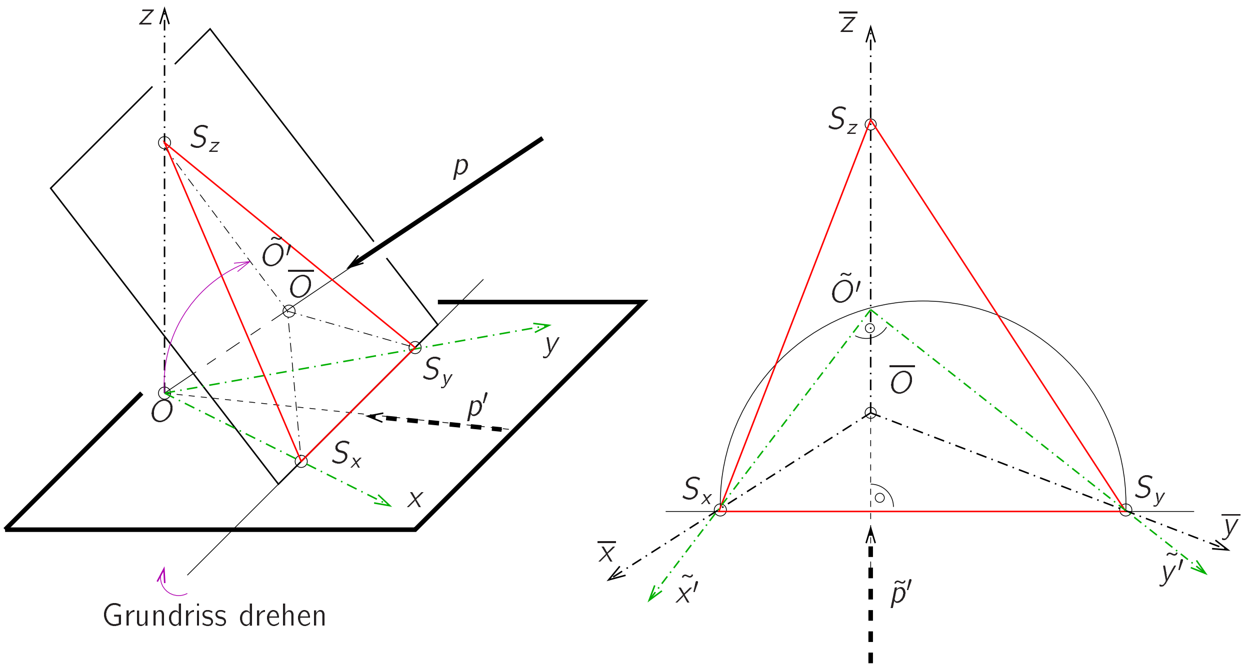


Abbildung 3.32: Senkrechte Axonometrie: Grundriss in die Bildtafel drehen

Für das Einschneideverfahren muss der Grundriss und die Bildtafel in derselben Zeichenebene liegen. Also drehen wir den Grundriss um die Grundrissspur in die Bildebene (Fig. 3.32).
Aus dem rechten Bild von Fig. 3.32 erkennen wir

- wie wir den Grundriss in die Zeichenebene legen müssen und in welche Richtung wir einschneiden müssen (senkrecht zur Grundrissspur).
- nach analogen Überlegungen für die Aufrisse:
  Das Bild $\overline{\mathbf{O}}$ des Kooridnatenursprungs ist der **Schnittpunkt der Höhen** des Spurdreiecks und die Höhen sind die Bilder der Koordinatenachsen.

Es gibt nun **drei Möglichkeiten**, die Orientierung für das Einschneideverfahren (bei senkrechter Axonometrie) vorzugeben:

a) Man legt das **Spurdreieck** S_x, S_y, S_z (im Einschneidebild) fest. Dann sind die Höhen des Spurdreiecks die Bilder der Koordinatenachsen und der Höhenschnittpunkt ist $\overline{O}$.
Den Nullpunkt des Grundrisses findet man über den Thaleskreis (s. Fig. 3.32). Durch Herausziehen des umgeklappten Grundrisses in Richtung $\tilde{p}'$ liegt die Position und die Einschneiderichtung für den Grundriss fest. Analog verfährt man mit einem der Aufrisse.

b) Man legt das Bild des **Koordinatendreibein**s fest, wählt irgendeinen Punkt der x-Achse als **Spurpunkt** S_x und ergänzt S_y, S_z so, dass die Koordinatenbilder die Höhen des Spurdreiecks sind. Der Rest verläuft wie in a).

c) Man legt in Grund– und Aufriss die **Projektionsrichtung** fest und wählt (z.B.) den **Spurpunkt** S_x. Die Grundrissspur muss senkrecht zum Grundriss der Projektionsrichtung sein (s. Fig.3.33). Damit findet man S_y im Grundriss und Aufriss. Die Aufrissspur muss senkrecht zum Aufriss der Projektionsrichtung sein. Damit findet man S_z. Also sind von dem Spurdreieck die Seiten S_xS_y, S_yS_z und der Höhenfußpunkt auf der Seite S_xS_y bekannt (s. Fig. 3.33). Mit der Länge von S_yS_z lässt sich S_z im Einschneidebild zeichnen. Der Rest verläuft wie bei a). Statt der Höhe auf S_xS_y kann man auch die wahre Länge von S_xS_z verwenden (sie muss zuerst bestimmt werden !).

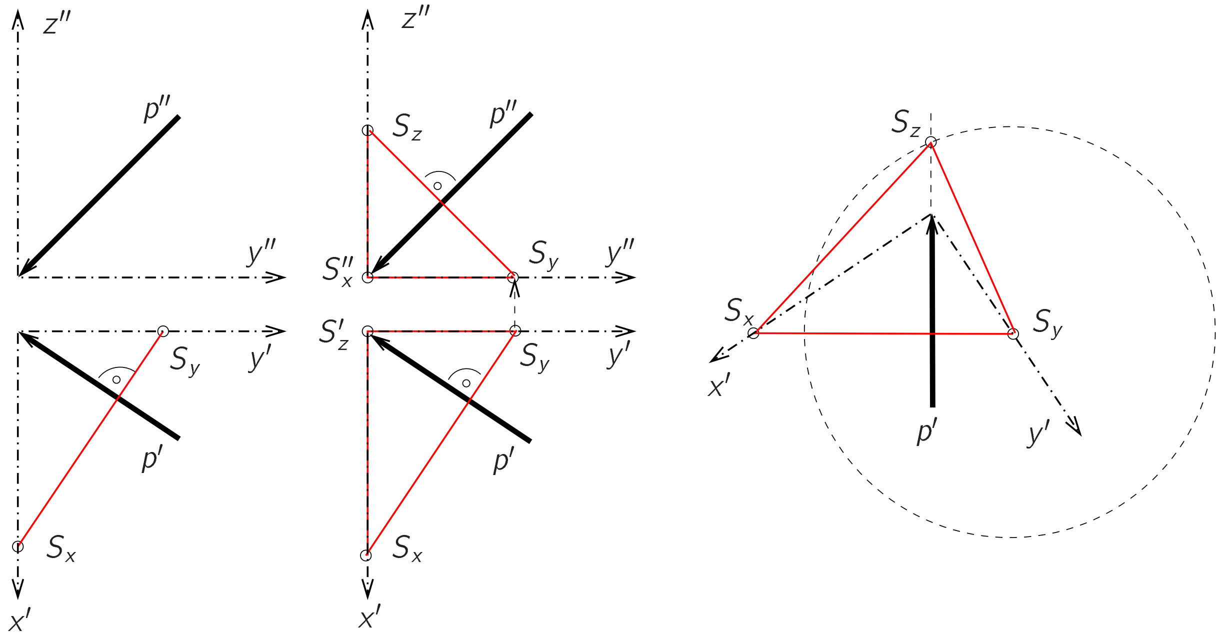


Abbildung 3.33: Konstruktion des Spurdreiecks aus der Projektionsrichtung

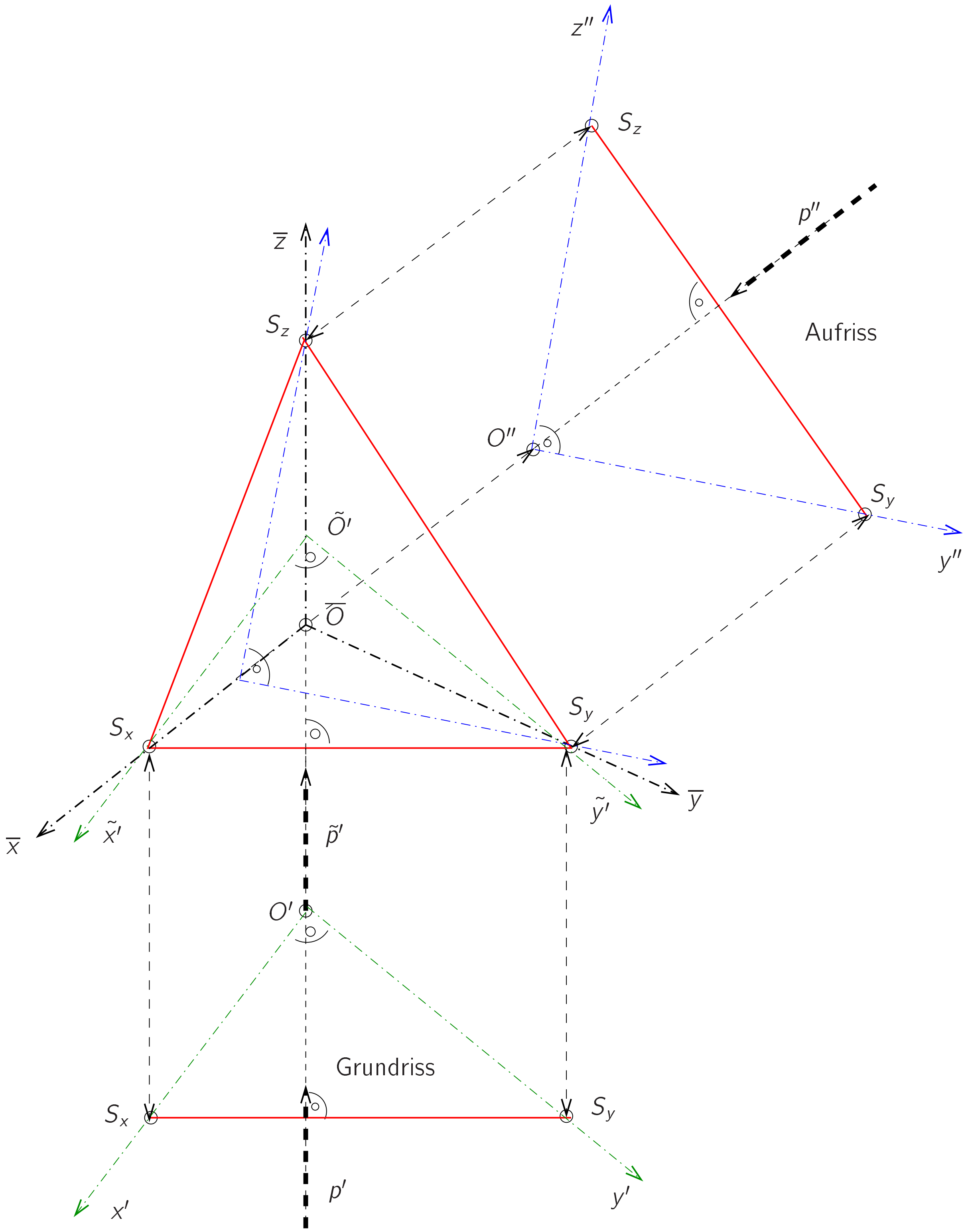


Abbildung 3.34: Senkrechte Axonometrie: Einschneideverfahren

Mögliche Vorgaben:

- Das **Spurdreieck** ist gegeben oder
- die Bilder der **Koordinatenachsen** sind gegeben oder
- die **Projektionsrichtung** ist in Grund– und Aufriss gegeben.

Aufgabe 3.18 *Gegeben: Grund– und Aufriss eines "halben" Würfels und die Bilder der Koordinatenachsen. Gesucht: Ein anschauliches Bild in senkrechter Axonometrie mit Hilfe des Einschneideverfahrens. Gib die Projektionsrichtung in Grund– und Aufriss an.*

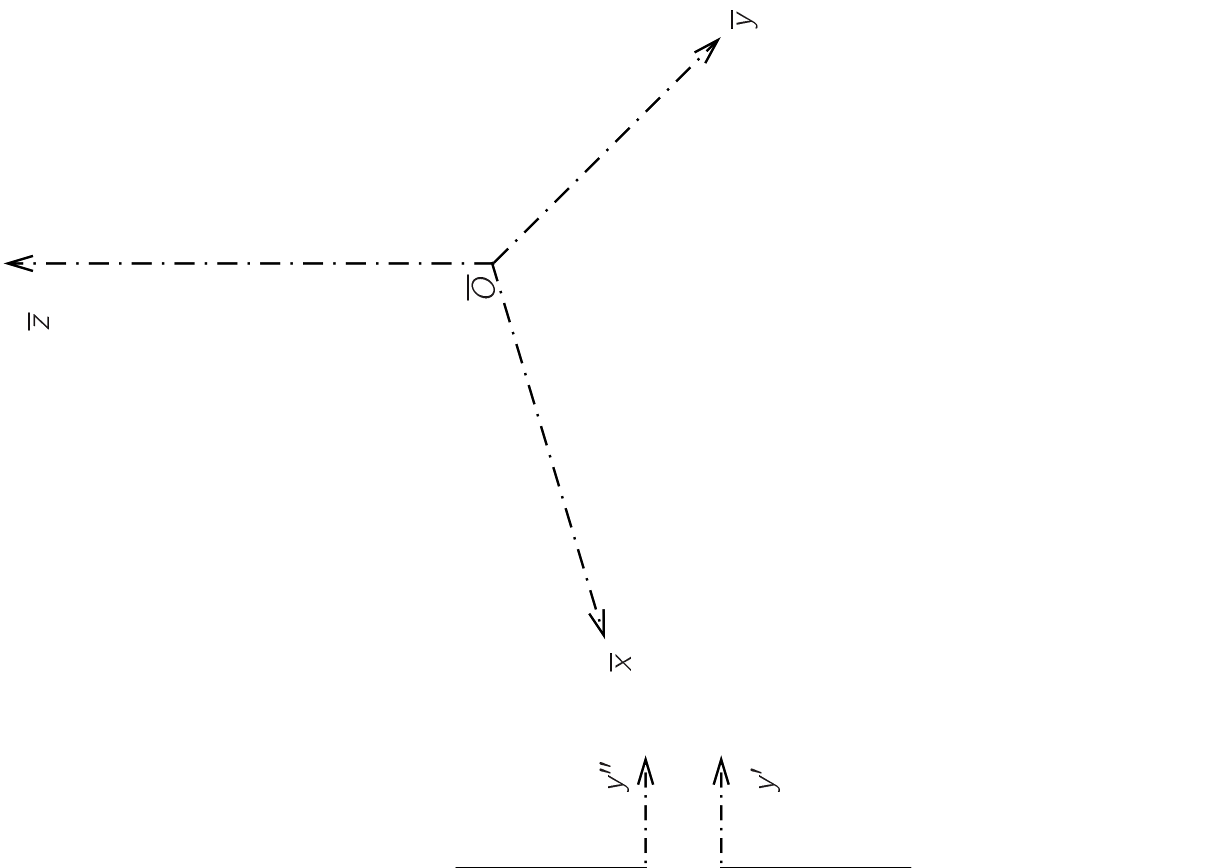


Abbildung 3.35: Senkrechte Axonometrie: Beispiel "halber" Würfel

Aufgabe 3.19 *Gegeben: Grund– und Aufriss eines Hauses und die Projektionsrichtung für eine senkrechte Axonometrie.*
Gesucht: Das zugehörige senkrechte axonometrische Bild mit Hilfe des Einschneideverfahrens.

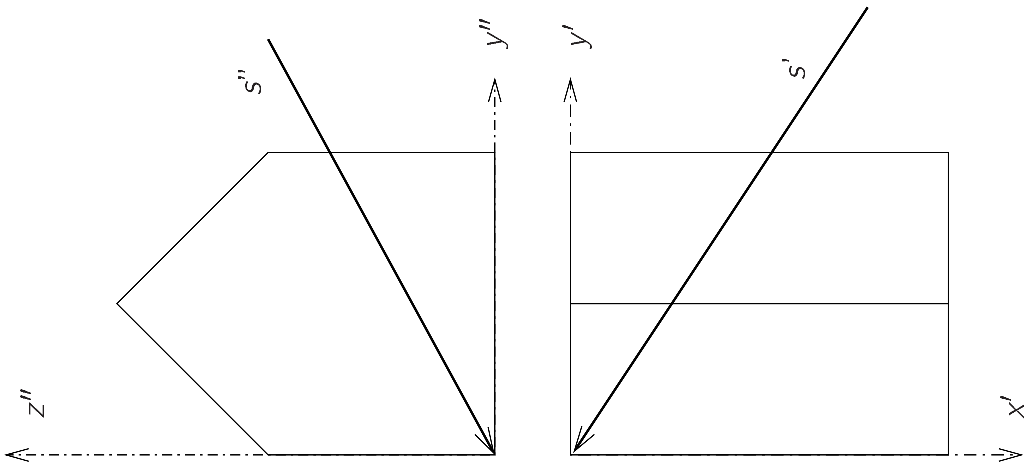


Abbildung 3.36: Senkrechte Axonometrie: Haus mit vorg. Projektionsrichtung

3.7 Dachausmittelung

(s. LEO S.195,197)

Ein Dach besteht i.A. aus ebenen geradlinig begrenzten Flächenstücken. Wir nehmen an, dass die unteren Begrenzungsstrecken, die **Traufkanten**, horizontal sind und auf **gleicher Höhe** liegen. Wir nennen zwei sich auf der Traufkante schneidende Dachflächen *benachbart*. Eine Schnittgerade benachbarter Dachebenen heißt **Grat**- oder **Kehllinie**, je nachdem sie von einer "ausspringenden" oder "einspringenden" Ecke der Traufe ausgeht. Die Schnittgerade zweier nicht benachbarter Dachebenen heißt **First**.

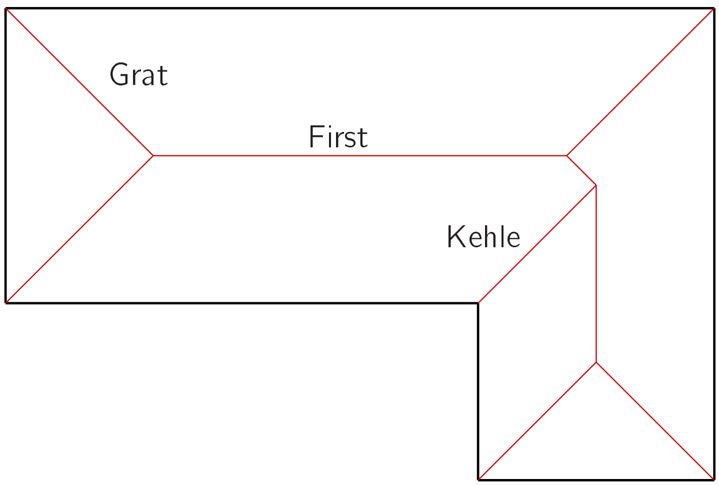


Abbildung 3.37: First, Grat- und Kehllinien eines Daches (Dachausmittelung)

Die **Aufgabe** der Dachausmittelung besteht darin, First, Grat- und Kehllinien sowie die wahre Gestalt der einzelnen Dachflächen zu bestimmen.

Lösungsprinzip:

Eine horizontale Hilfsebene ε wird in geeigneter Höhe durch das Dach gelegt. ε schneidet das Dach in Höhenlinien. Die Höhenlinien schneiden sich in Grat- und Kehllinien. Und Grat- und Kehllinien schneiden sich in Firstlinien.

Durchführung:

(1) Wähle die Höhe der Ebene ε so, dass die Höhenlinien im Grundriss einen Abstand von wenigstens 1-2 cm von der Traufkante haben.
Bei *gleicher Dachneigung* haben Höhenlinien überall den gleichen Abstand von der Traufkante !

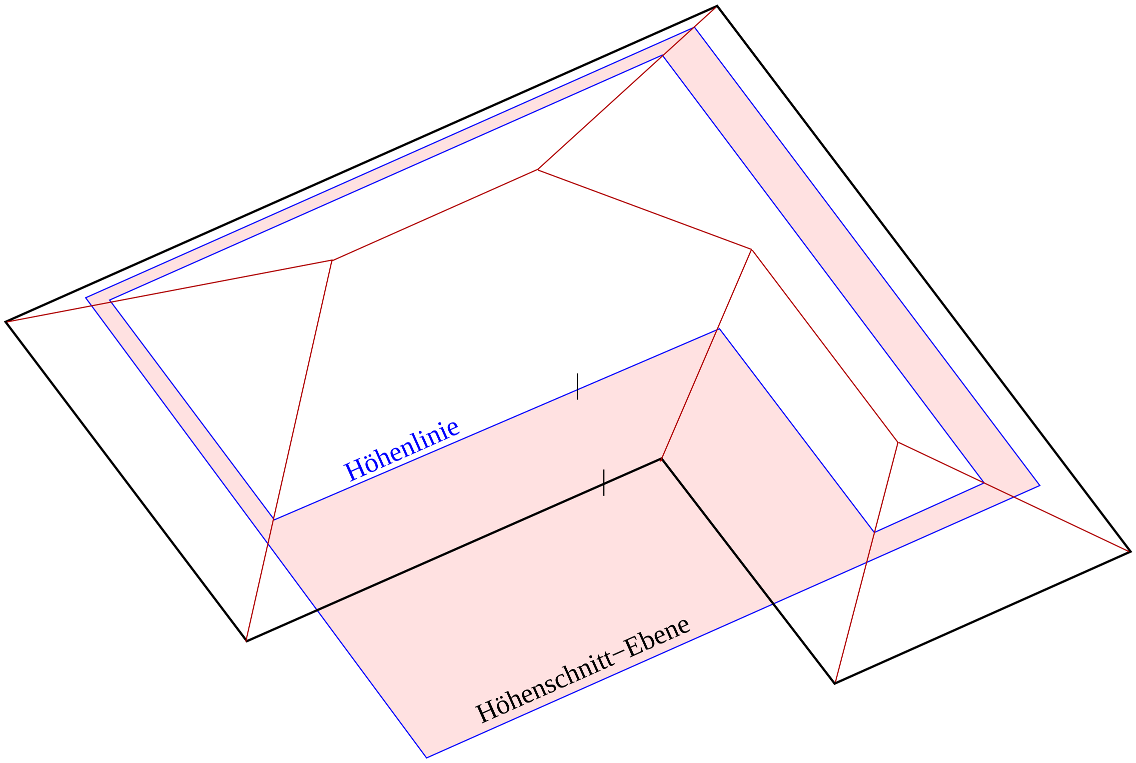
(2) Zeichne die Höhenlinien für jede Dachebene in den Grundriss.

(3) Schneide die Höhenlinien benachbarter Dachflächen und verbinde die Schnittpunkte mit den entsprechenden Ecken des Traufpolygons. Dadurch erhält man die Grat- und Kehllinien.
Bei *gleicher Dachneigung* sind Grat– und Kehllinien Winkelhalbierenden der zugehörigen Traufkanten !

(4) Schnitt von „entsprechenden“ Grat- oder Kehllinien ergeben Punkte von Firstlinien.

(5) Fehlende Firstlinien ergeben sich, indem man die entsprechenden (nicht benachbarten) Dachebenen (mit Hilfe der Höhenlinien) schneidet.

(6) Die wahre Gestalt einer bestimmten Dachfläche erhält man durch Drehen der Ebene um die Traufkante in die Zeichenebene. Der wahre Abstand eines Punktes von der Traufkante ergibt sich als Hypothenuse des zugehörigen Stützdreiecks.



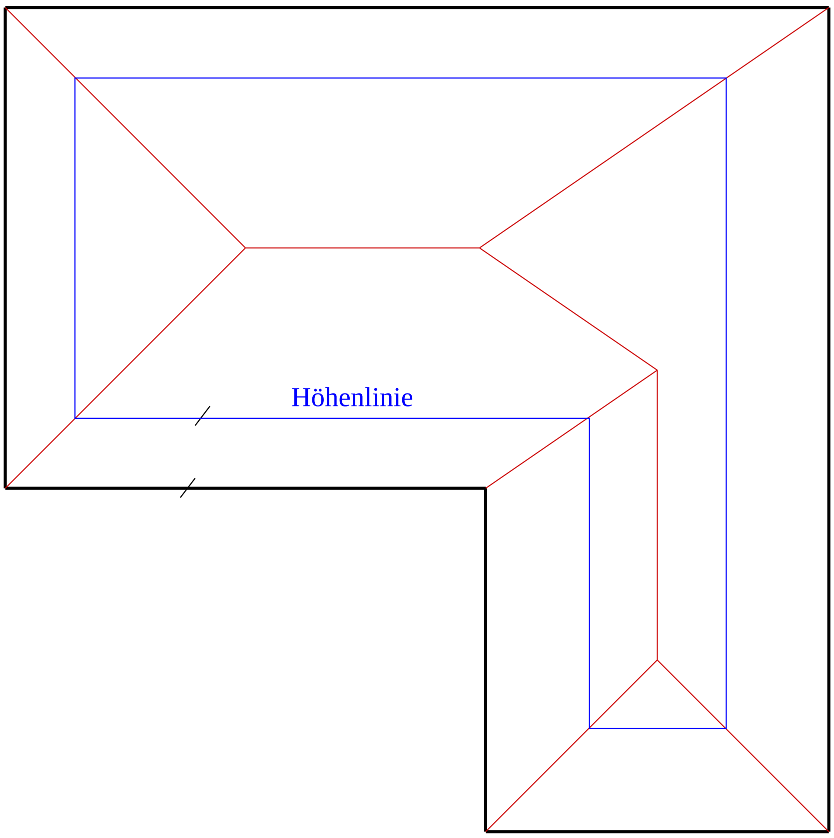


Abbildung 3.38: Höhenschnitt und Höhenlinien

Aufgabe 3.20 :

Gegeben: *Grundriss der Traufkanten eines Daches mit Dachneigungen α, β (Abb. 3.39).*

Gesucht: *a) Grat-, First- und Kehllinien,*

b) die wahre Gestalt der Dachfläche, die an der Traufkante $\overline{AB}$ anliegt.

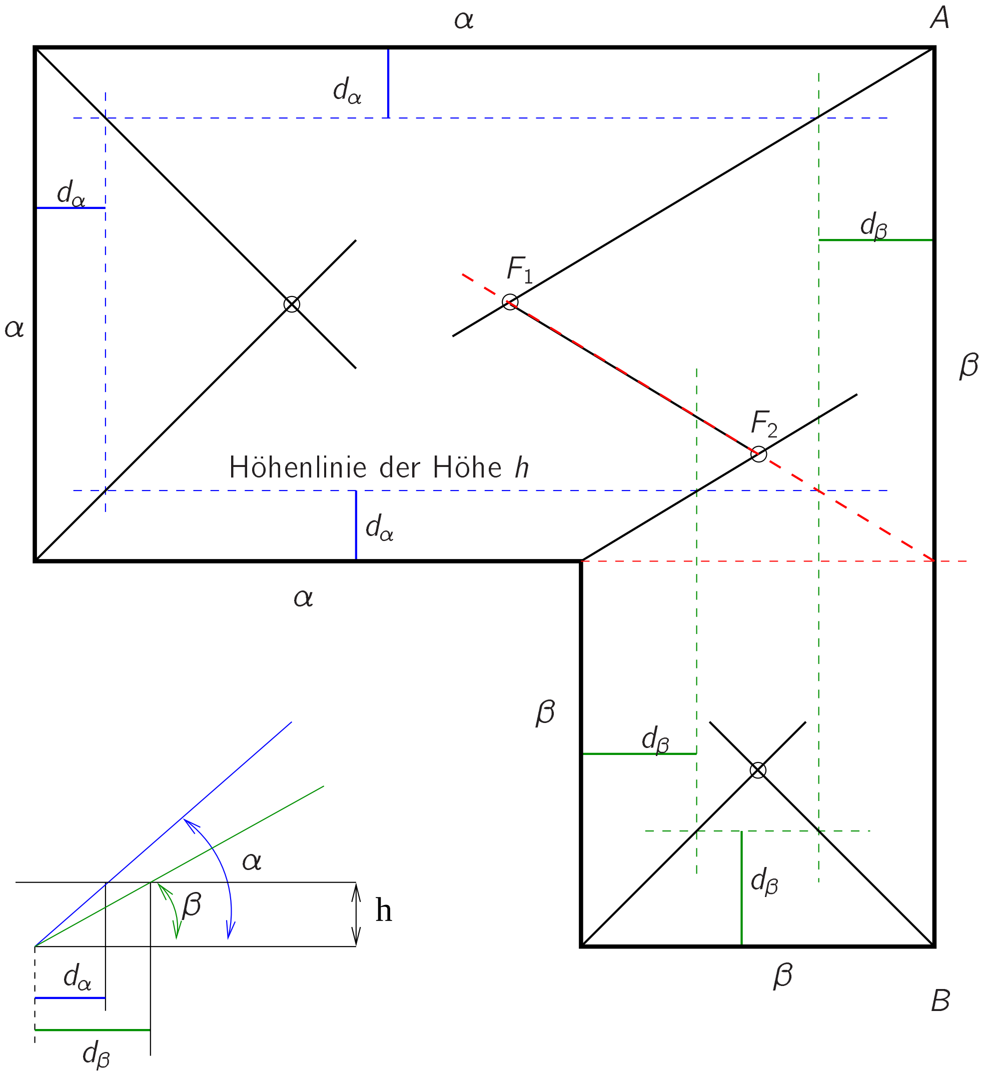


Abbildung 3.39: Grat– und Kehllinien zu Aufgabe 3.20

Beachte die Konstruktion der Strecke F_1F_2 als Grat zweier **nicht benachbarter** Dachflächen !

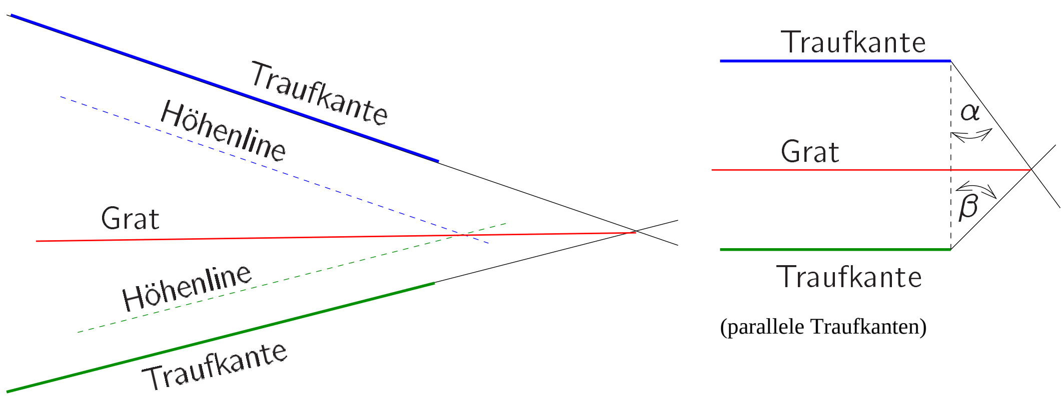


Abbildung 3.40: Konstruktionsprinzip einer Grat/Kehl–linie

Aufgabe 3.21 *:*

Gegeben: *Grundriss der Traufkanten eines Daches mit Dachneigungen* $\alpha = 30°$, $\beta = 40°$, $\gamma = 50°$ *(Abb. 3.41).*

Gesucht: *Grat–, First– und Kehllinien.*

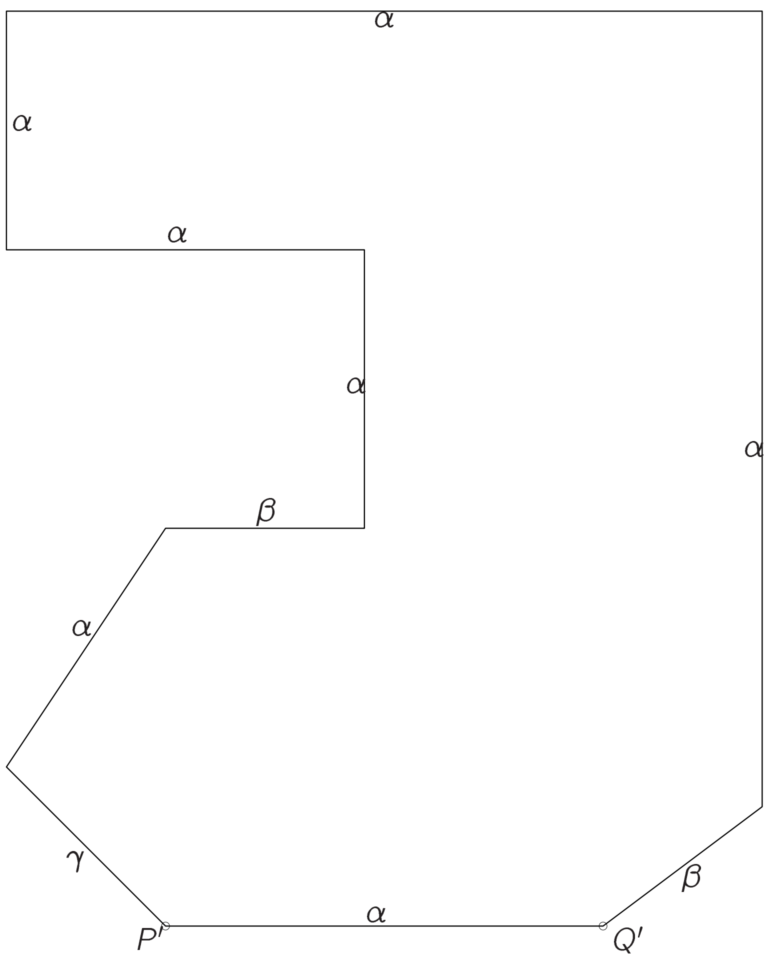


Abbildung 3.41: Aufgabe 2 zur Dachausmittelung

Kapitel 4

Projektion von Kurven und Flächen

4.1 Kreis und Ellipse

(s. LEO S.55)

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem lässt sich ein **Kreis** mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius r durch die **Gleichung**: $x^2 + y^2 = r^2$ oder durch die
Parameterdarstellung: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ beschreiben.

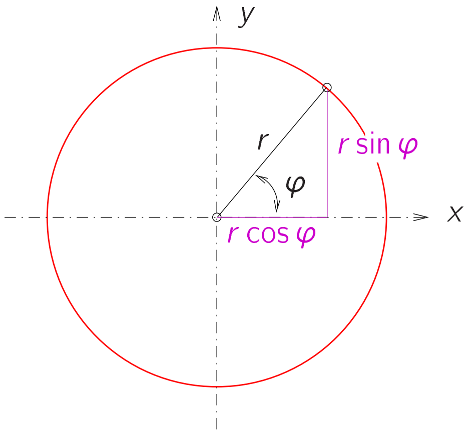


Abbildung 4.1: Parameterdarstellung eines Kreises

Es gibt viele Möglichkeiten, eine Ellipse zu definieren. Wir wollen hier die folgende Definition wählen:

Eine ebene Kurve k, die sich in einem geeigneten rechtwinkligen Koordinatensystem durch eine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a, b > 0$$

beschreiben lässt, ist eine **Ellipse** mit **Mittelpunkt** $(0,0)$ und den **Halbachsen** a, b. Für $a = b$ erhält man einen Kreis.

Die Strecke zweier Ellipsenpunkte heißt **Sehne** der Ellipse.

Eine Sehne durch den Mittelpunkt heißt **Durchmesser** der Ellipse.

Die Punkte $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$, $(0,-b)$ sind die **Scheitel** der Ellipse.

Im Fall $a \neq b$ sind die x-Achse und die y-Achse die einzigen Symmetriegeraden der Ellipse, d.h., nur die Spiegelungen an x- und y-Achse bilden die Ellipse auf sich ab. Die Durchmesser auf den Symmetrieachsen heißen die **Hauptachsen** der Ellipse.

Die **Parameterdarstellung** der Ellipse k ist: $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ mit $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Ellipsenkonstruktionen

a) **Scheitelkreiskonstruktion.**

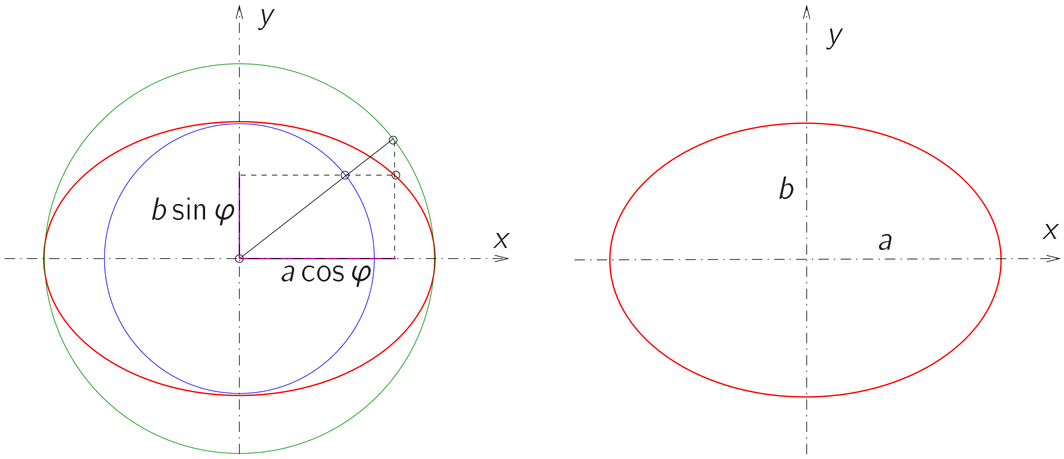


Abbildung 4.2: Parameterdarstellung einer Ellipse

Aus der Parameterdarstellung der Ellipse erkennt man, dass der Ellipsenpunkt $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ dieselbe x-Koordinate wie der Punkt $(a\cos\varphi,\ a\sin\varphi)$ des Kreises $x^2+y^2=a^2$ und dieselbe y-Koordinate wie der Punkt $(b\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ des Kreises $x^2+y^2=b^2$ zum Parameter φ hat. Die beiden Kreise $x^2+y^2=a^2$ und $x^2+y^2=b^2$ heißen die **Scheitelkreise** der obigen Ellipse.

Daher kann man Ellipsenpunkte konstruieren, indem man die y-Koordinate eines Punktes des großen Scheitelkreises mit dem Faktor b/a staucht (bzw. die x-Koordinate des kleinen Scheitelkreises mit dem Faktor a/b streckt):

Voraussetzung: Mittelpunkt und Scheitel sind bekannt.

(1) Zeichne die beiden Scheitelkreise der Ellipse (s. Abb. 4.3, links).

(2) Wähle einen Strahl durch den Mittelpunkt der Ellipse.

(3) Der Strahl schneidet den kleinen (bzw. großen) Kreis in einem Punkt P (bzw. Q).

(4) Fälle das Lot von P (Q) auf die kleine (große) Achse. Der Schnittpunkt dieser Lote ist ein Punkt der Ellipse.

Eine Abbildung, die nur eine Koordinate streckt oder staucht, nennt man **Affinität**.

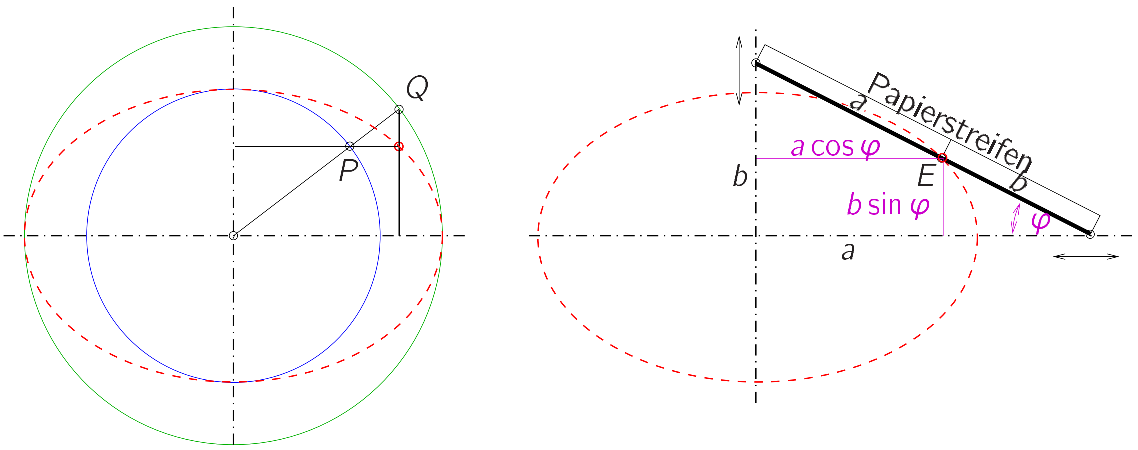


Abbildung 4.3: Konstruktion von Punkten einer Ellipse

b) **Papierstreifenmethode.** (Abb. 4.3, rechts) (s. LEO S.60)

Voraussetzung: Mittelpunkt und Scheitel sind bekannt.

(1) Schneide einen Papierstreifen der Länge $a+b$ aus und markiere die Stelle, an denen die Strecken der Länge a und b zusammengesetzt sind, durch E.

(2) Gleitet der Papierstreifen wie in der Skizze (Abb. 4.3, rechts) auf den Achsen der Ellipse, so beschreibt der Punkt E in jeder Lage einen Ellipsenpunkt.

c) **Gärtner- oder Fadenkonstruktion.** (Abb. 4.4, links)

Voraussetzung: Die „Brennpunkte“ F_1 , F_2 und die große Halbachse a der Ellipse sind bekannt.

(1) Schneide einen Faden der Länge $2a$ zurecht.

(2) Befestige die Enden des Fadens in den Punkten F_1, F_2.

(3) Ziehe den Faden wie in der Skizze straff. Der Punkt, an dem sich die Bleistiftspitze befindet, ist ein Ellipsenpunkt.

(4) Für die Brennweite $e = \frac{1}{2}|F_1F_2|$ gilt: $e^2 = a^2 - b^2$.

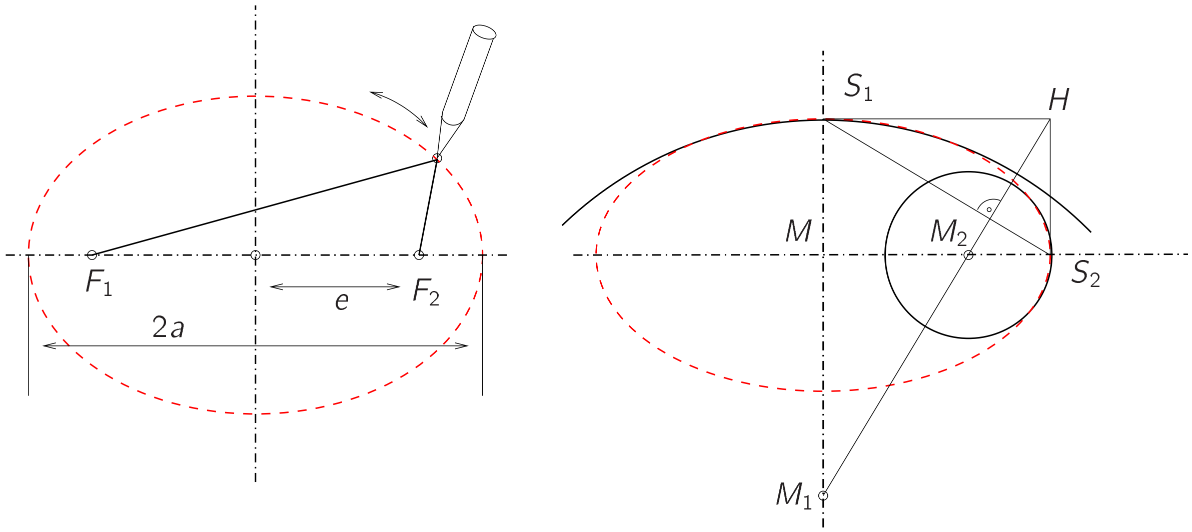


Abbildung 4.4: “Gärtnerkonstruktion” und Scheitel-Krümmungskreise einer Ellipse

d) **Scheitelkrümmungskreismethode.** (Abb. 4.4, rechts) (s. LEO S.64)

Die Methoden a), b), c) bestimmen Ellipsenpunkte exakt. Wir geben nun noch eine sehr praktische Näherungsmethode an:
Idee: Man bestimmt Mittelpunkte und Radien der Krümmungskreise für die Scheiteln der Ellipse, zeichnet die Scheitelkrümmungskreise und nähert die Ellipse durch tangentiale Kurvenbögen an.

Voraussetzung: Mittelpunkt M und Scheitel sind bekannt.

(1) Wähle zwei nicht auf einem Durchmesser liegende Scheitel S_1, S_2.

(2) Ergänze das rechtwinklige Dreieck M, S_1, S_2 durch den Punkt H zu einem Rechteck.

(3) Fälle das Lot von H auf die Gerade durch S_1, S_2.

(4) Die Schnittpunkte M_1, M_2 des Lotes mit den Achsengeraden sind die Mittelpunkte der Scheitelkrümmungskreise für die Scheitel S_1, S_2.

(5) Zeichne die Scheitelkrümmungskreise in allen Scheiteln.

(6) Zeichne eine Kurve durch die Scheitel, die die Krümmungskreise von innen bzw. von außen berührt.

4.2 Normalriss eines Kreises

Der Normalriss eines Kreises ist i.a. eine Ellipse, deren Mittelpunkt das Bild des Kreismittelpunktes ist. Die große Halbachse der Ellipse ist gleich dem Kreisradius.
(Falls der Kreis in einer projizierenden Ebene liegt, ist das Bild eine Strecke.)

Um dies einzusehen, betrachten wir die folgende Zweitafelprojektion eines Kreises (Abb. 4.5):
Gegeben: Kreis $k \perp \pi_2$ durch seinen Aufriss k''.
Gesucht: Grundriss k' des Kreises.

Zur Lösung führen wir $x-y-$Koordinaten in der Kreisebene und $\xi-\eta-$Koordinaten im Grundriss ein (s. Abb. 4.5, rechts). Die Kreisgleichung ist dann $x^2+y^2=r^2$. In der Skizze erkennt man, dass ein Punkt (x, y) der Kreisebene den Grundriss (ξ, η) mit $\xi = x$ und $\eta = y\cos\alpha$ hat. Wegen $x^2+y^2=r^2$ gilt

$$\xi^2 + (\eta/\cos\alpha)^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad \xi^2/r^2 + \eta^2/(r\cos\alpha)^2 = 1\,.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren große Halbachse gleich r ist.

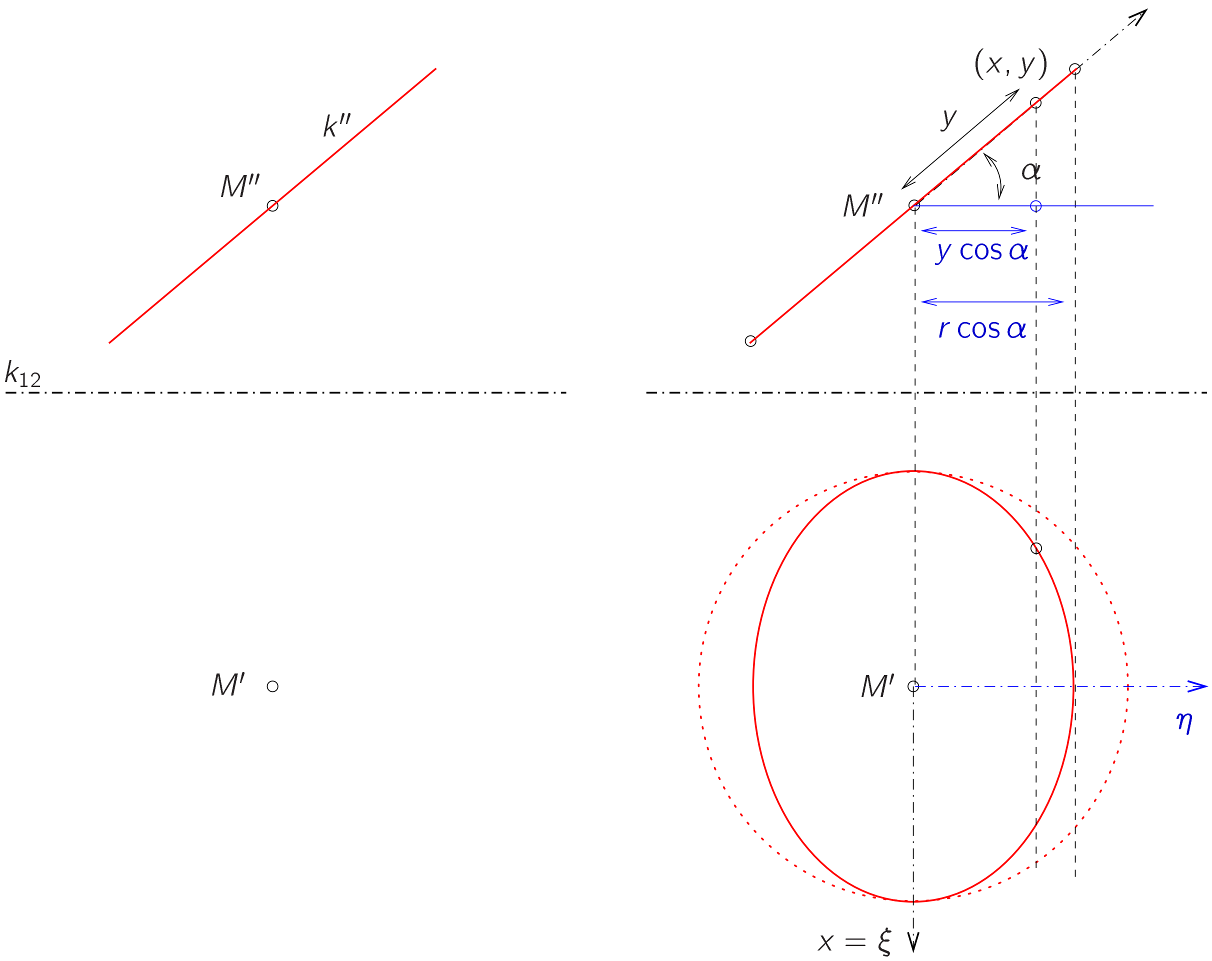


Abbildung 4.5: Projektion eines Kreises

Aufgabe 4.1 *Zeichne den Grundriss des obigen Kreises (Abb. 4.5, links) mit Hilfe der Schreitelkrümmungskreismethode.*

4.3 Parallelprojektion einer Ellipse

Die Parallelprojektion einer Ellipse ist eine Ellipse oder eine Strecke. Der Mittelpunkt geht in den Mittelpunkt der Bildellipse über. Da rechte Winkel i.a. nicht auf rechte Winkel abgebildet werden, sind die Bilder der Scheitel i.a. **nicht** die Scheitel der Bildellipse. Deshalb führt man eine Verallgemeinerung des Begriffs „senkrechte Durchmesser“ einer Ellipse ein:

Zwei Durchmesser einer Ellipse heißen **konjugiert**, wenn die Tangenten in den Endpunkten des einen Durchmessers parallel zum anderen Durchmesser sind (s. Abb. 4.6).

Die Hauptachsen einer Ellipse sind spezielle konjugierte Durchmesser.
Je zwei senkrechte Durchmesser eines Kreises sind konjugiert.

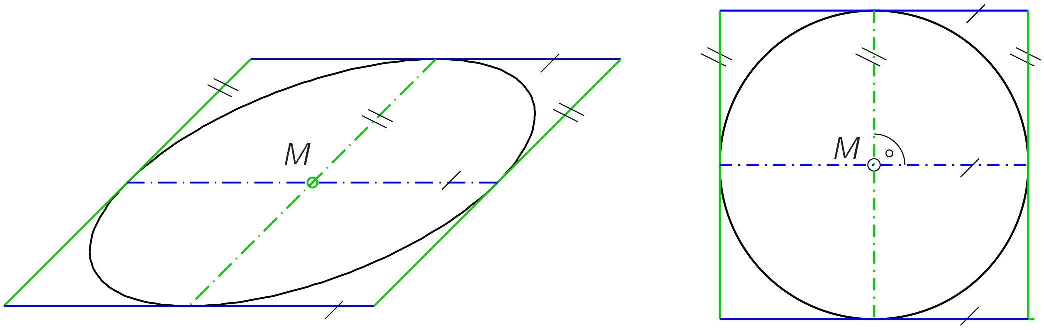


Abbildung 4.6: Konjugierte Durchmesser einer Ellipse

Für die Konstruktion des Bildes einer Ellipse bei Parallelprojektion sind die folgenden Aussagen wichtig:

Bei **Parallel**projektion einer Ellipse werden

a) der **Mittelpunkt** auf den Mittelpunkt und
b) **konjugierte** Durchmesser auf konjugierte Durchmesser

der Bildellipse abgebildet.

Die oben beschriebenen Verfahren, eine Ellipse zu zeichnen, verlangen alle die Kenntnis des Mittelpunktes und der Scheitel der Ellipse. Deshalb benötigen wir noch eine Methode, um aus dem Mittelpunkt und zwei konjugierten Durchmessern die Scheitel zu bestimmen.

Rytzsche Konstruktion: (s. LEO S.62,63)

Gegeben: Mittelpunkt M und zwei konjugierte Halbmesser $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$ einer Ellipse (Abb. 4.7).
Gesucht: Scheitel der Ellipse.

(1) Drehung von $\overline{MQ}$ um 90° in $\overline{MQ'}$ so, dass der Winkel zwischen $\overline{MP}$ und $\overline{MQ'} < 90°$ ist.
(2) Mittelpunkt R der Strecke $\overline{PQ'}$ bestimmen.
(3) Kreis um R durch M.
(4) Schnitt dieses Kreises mit der Geraden durch P, Q' liefert die Punkte A, B.
(5) Die Geraden $\overline{MA}$ durch M, A und $\overline{MB}$ durch M, B geben die *Richtung* der Hauptachsen an.
(6) Die *Längen* der Hauptachsen sind $b = |AP|$ und $a = |BP|$.
(7) Die Scheitel ergeben sich aus (6) und dem “Papierstreifen” AB (vgl. mit Fig 4.3) .

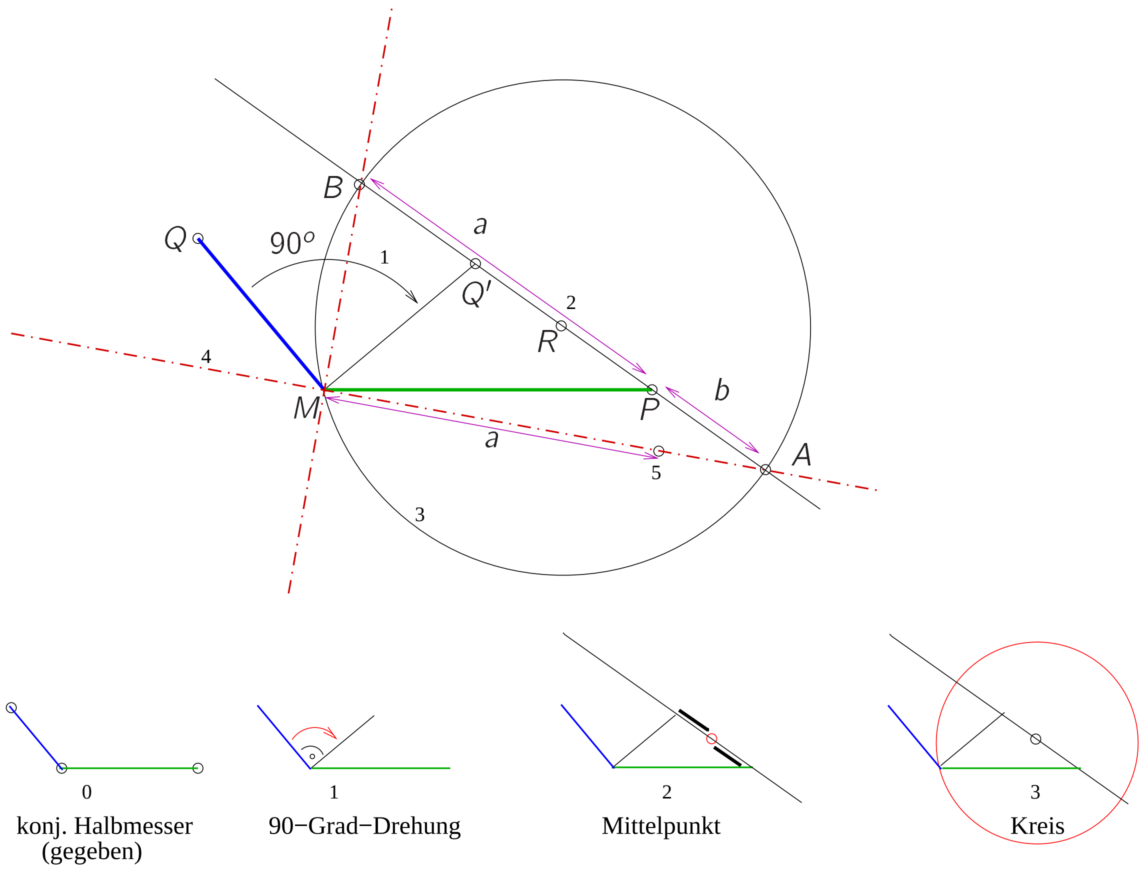


Abbildung 4.7: Rytz–Konstruktion

Aufgabe 4.2 *Bestimme in Abb. 4.8 jeweils zu vorgegebenem Mittelpunkt M und konjugierten Halbmessern $\overline{MP}, \overline{MQ}$ die Scheitel der zugehörigen Ellipse.*

Abbildung 4.8: Aufgaben zur Rytz–Konstruktion

4.4 Kreis und Ellipse in der Axonometrie

Das axonometrische **Bild** eines Kreises oder einer Ellipse ist eine **Ellipse** oder eine Strecke.
Im **allgemeinen** Fall geht man so vor:

(1) Bestimme das Bild des Mittelpunktes.
(2) Wähle zwei **konjugierte** Halbmesser im Urbild und bilde diese ab.
(Bei einem Kreis wählt man zwei senkrechte Halbmesser, die sich „leicht“ abbilden lassen. Bei einer Ellipse wählt man zwei senkrechte Haupthalbachsen.)
(3) Bestimme die Hauptachsen der Bildellipse mit Hilfe der **Rytz**-Konstruktion.
(4) Zeichne die Ellipse z.B. mit Hilfe der Scheitelkrümmungskreismethode.

Es gibt einige Sonderfälle:

a) Falls die Ellipse **parallel zur Bildtafel** liegt, wird sie **unverzerrt** abgebildet.
b) Der zur Bildtafel parallele Durchmesser eines **Kreises** wird unverzerrt abgebildet und ist im Falle einer **senkrechten** Projektion gleich der großen Halbachse der Bildellipse.

Aufgabe 4.3 :
Gegeben: Grund– und Aufriss eines Zylinderstumpfes (Abb. 4.9).
Gesucht: Isometrische Vogelperspektive des Zylinderstumpfes.

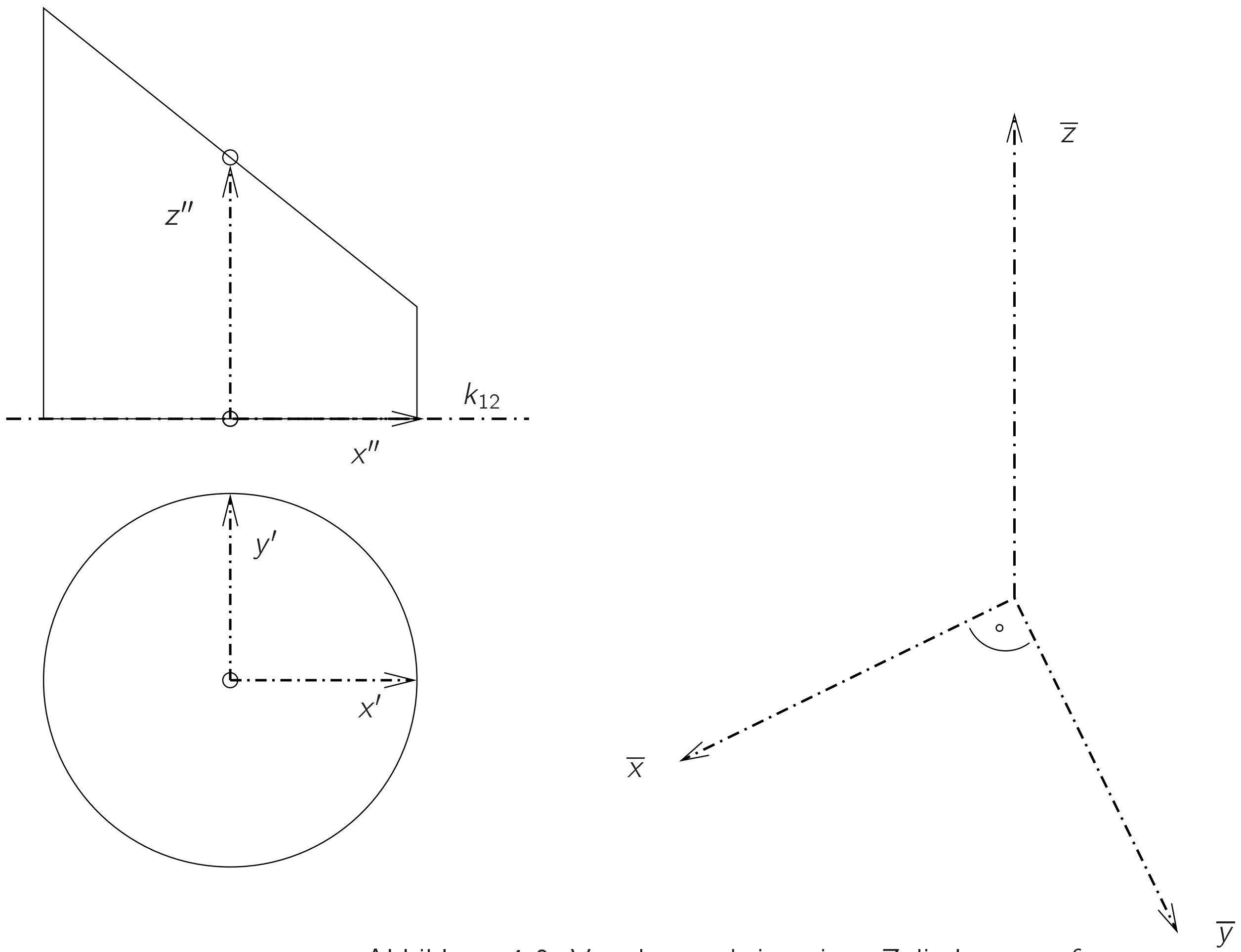


Abbildung 4.9: Vogelperspektive eines Zylinderstumpfes

Aufgabe 4.4 *:*
Stelle den in Grund– und Aufriss gegebenen Zylinder mit aufgesetzter Kugel mit Hilfe des Einschneideverfahrens in **senkrechter** *Axonometrie dar (s. Abschnitt 3.6).*
(Für die Bildellipsen der Zylinder-Kreise ist **kein Rytz** *nötig ! Die großen Hauptachsen sind parallel zur Grundrissspur und gleich dem Durchmesser der Kreise. Zur Bestimmung der Länge der kleinen Halbachse bilde man einen geeigneten Kreispunkt ab und beachte Abb. 4.3, links)*

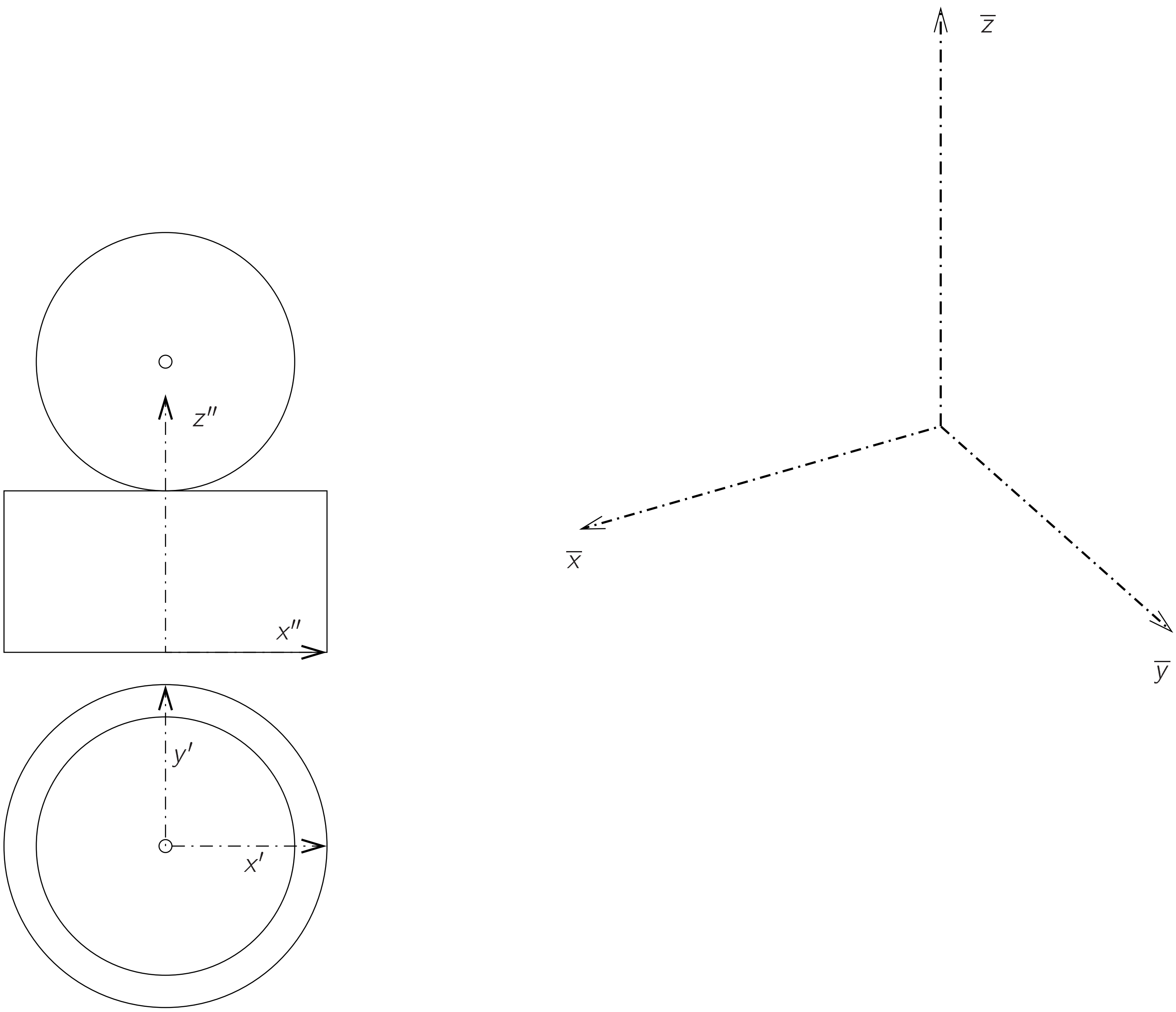


Abbildung 4.10: Zylinder mit Kugel in senkrechter Axonometrie

4.5 Zylinder und Kegel

(s. LEO S.137,140)

Durch Parallelverschieben einer Geraden g **(Erzeugende)** längs einer ebenen Kurve c **(Leitkurve)** entsteht eine **allgemeine Zylinderfläche** (Abb. 4.11 a)).

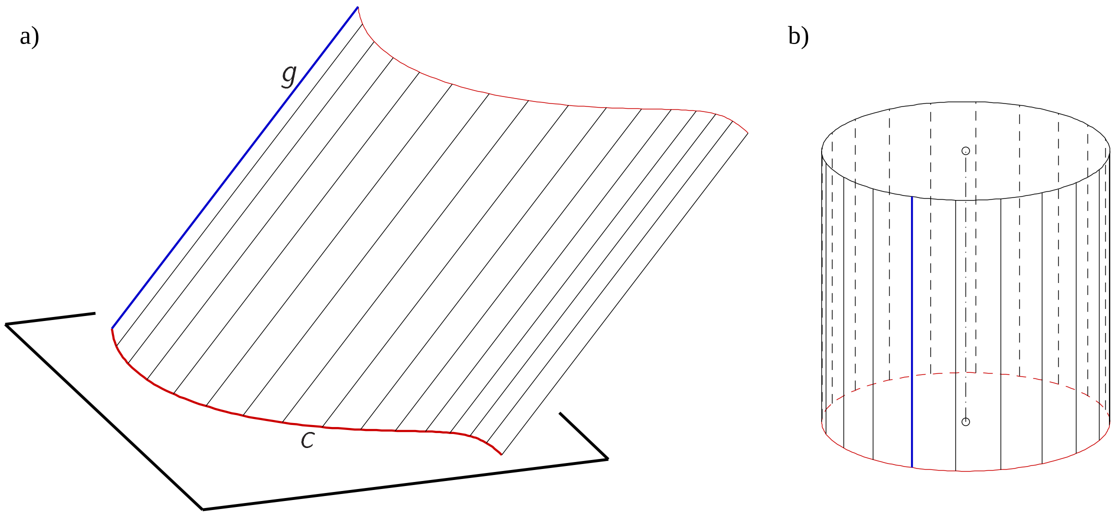


Abbildung 4.11: Erzeugung eines a) allgemeinen Zylinders b) senkrechten Kreiszylinders

Ist c speziell ein **Kreis** und stehen die Erzeugenden **senkrecht** zur Kreisebene, entsteht ein **senkrechter Kreiszylinder** (Abb. 4.11 b)). Die Leitkurve heißt **Basiskreis**, die Erzeugenden heißen **Mantellinien**. Die Symmetriegerade a heißt **Achse**. Da der senkrechte Kreiszylinder auch durch Drehung einer Erzeugenden um die Achse a erzeugt werden kann, nennt man diese Fläche auch **Dreh**- oder **Rotationszylinder**.

Eine **Ebene schneidet** einen senkrechten Kreiszylinder in einem Kreis, in einer Ellipse, oder in ein oder zwei Mantellinien (Abb. 4.12).

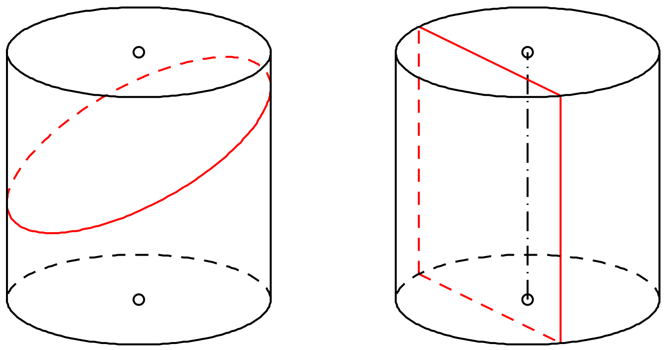


Abbildung 4.12: Ebene Schnitte eines Kreiszylinders

Gleitet eine Gerade g auf einer ebenen Kurve c und geht g stets durch einen festen Punkt S (Kegel**scheitel** oder -**spitze**), so entsteht eine **allgemeine Kegelfläche** (Abb. 4.13 a)).
Ist c speziell ein **Kreis** und liegt S auf einer Senkrechten zur Kreisebene durch den Kreismittelpunkt M, so entsteht ein **senkrechter Kreiskegel** (Abb. 4.13 b)). Die Gerade a durch M, S steht senkrecht auf der Kreisebene und heißt **Kegelachse**. Da der senkrechte Kreiskegel auch durch Rotation einer Geraden durch S um a erzeugt werden kann, nennt man ihn auch **Dreh**- oder **Rotationskegel**.

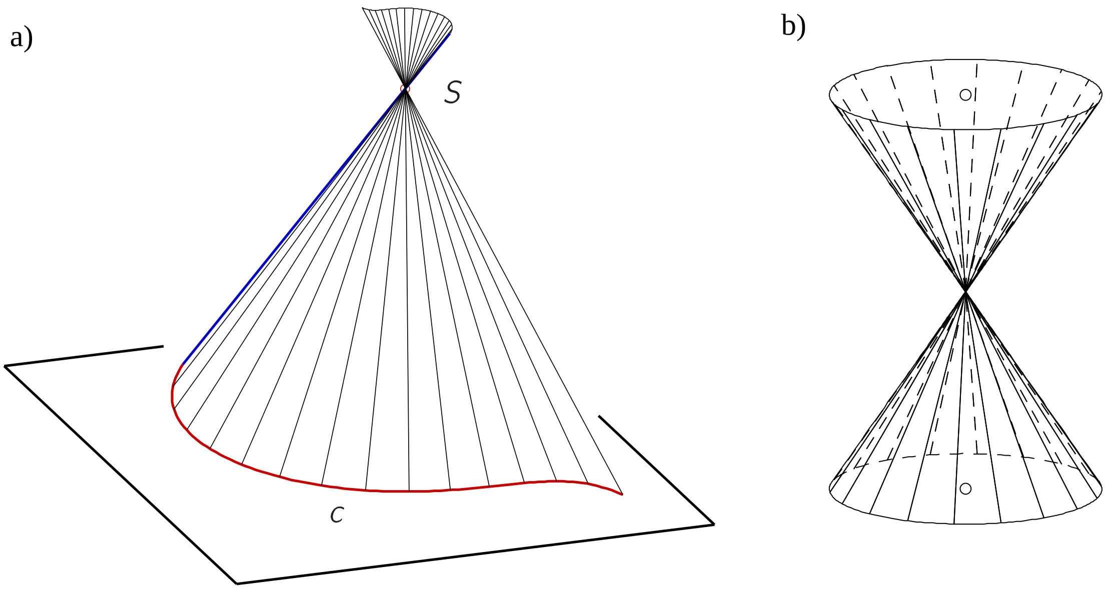


Abbildung 4.13: Erzeugung eines a) allgemeinen Kegels b) senkrechten Kreiskegels

Den Schnitt einer **Ebene** ε mit einem Drehkegel nennt man **Kegelschnitt**:

Falls die Kegelspitze S nicht in der Ebene ε liegt, so sind, je nach Steilheit von ε, folgende Kegelschnitte möglich:

(a)	Kreis	($\varepsilon \perp a$)	(b)	Ellipse	(ε flacher als Mantellinie)
(c)	Parabel	($\varepsilon \parallel$ Mantellinie)	(d)	Hyperbel	(ε steiler als Mantellinie)

Ebenen durch S schneiden den Kegel in zwei, einer oder keiner Geraden.

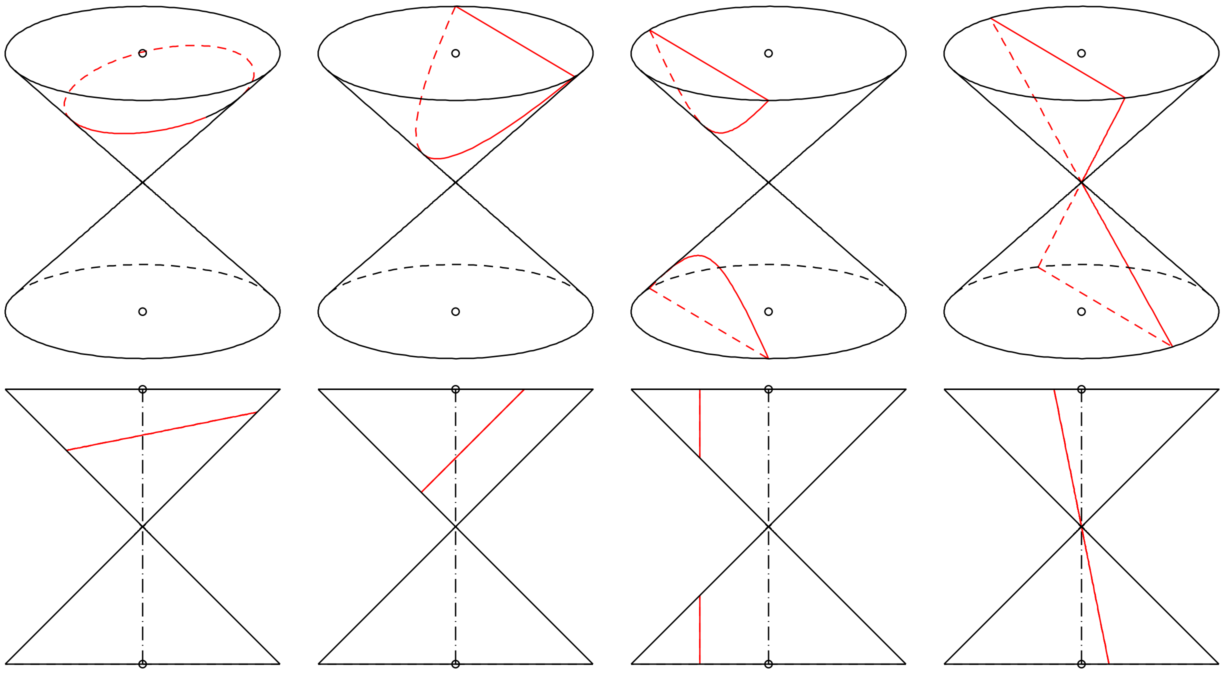


Abbildung 4.14: Ebene Schnitte eines Kreiskegels: Ellipse, Parabel, Hyperbel, Geradenpaar

4.6 Abwickelbare Flächen (s. LEO S.162,164)

Eine Fläche nennt man **abwickelbar**, wenn sie sich **längentreu** in die Ebene abbilden lässt, d.h. man kann sie unter Erhaltung der Längen sämtlicher auf ihr liegender Kurven in die Ebene ausbreiten.

Beispiele: a) Zylinder b) Kegel
c) die von den Tangenten einer Raumkurve erzeugte Fläche (Tangentialfläche).

4.6.1 Abwicklung eines Drehzylinders

Gegeben: Ein Drehzylinder und ein Punkt darauf in Grund- und Aufriss.
Gesucht: Die Abwicklung des Drehzylinders und des Punktes P.

Lösungs**idee:** Man nähert den Zylinder durch ein **Prisma** (Querschnitt ist ein regelmäßiges n-Eck) an, „schneidet“ das Prisma längs einer Kante auf und wickelt es in die Ebene ab.

Durchführung: (Abb. 4.15)

(1) Teile den Basiskreis in n (≥ 12) Teile und zeichne das n-Eck.
(2) Nimm die Länge d einer Seite des n-Ecks in den Zirkel und zeichne ein Rechteck der Höhe h (Zylinderhöhe) und Breite $n \cdot d$.
(3) Der Punkt P liegt auf oder zwischen zwei Kanten des Prismas. Zeichne diese zwei Kanten in der Abwicklung, nimm den kleineren Abstand von P zu einer dieser Kanten und zeichne die entsprechende „Zwischenkante“ k in die Abwicklung.
(4) Übertrage P in die Abwicklung auf die Zwischenkante. Die Höhe des Punktes P ergibt sich aus dem Aufriss.

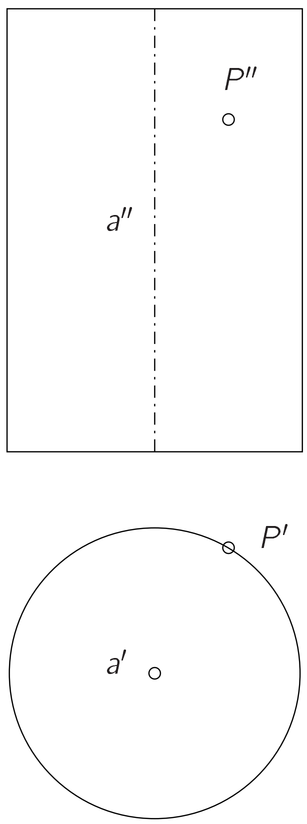


Abbildung 4.15: Abwicklung eines Zylinders

4.6.2 Abwicklung eines Drehkegels

Gegeben: Ein Drehkegel und ein Punkt darauf in Grund– und Aufriss (Abb. 4.16).
Gesucht: Die Abwicklung des Kegels und des Punktes P.

Lösungs**idee:** Annäherung des Kegels durch eine n-kantige **Pyramide**. Die Abwicklung des Kegels ist ein Kreissektor, dessen Öffnungswinkel $\alpha = 2\pi r/l$ durch den entsprechenden Winkel der abgewickelten Pyramide angenähert wird. Die Abwicklung des Punktes P erhält man durch eine zur Zylinderabwicklung analogen Näherungskonstruktion. Die notwendige wahre Länge der Strecke $\overline{SP}$ erhält man durch Paralleldrehen zu π_2.

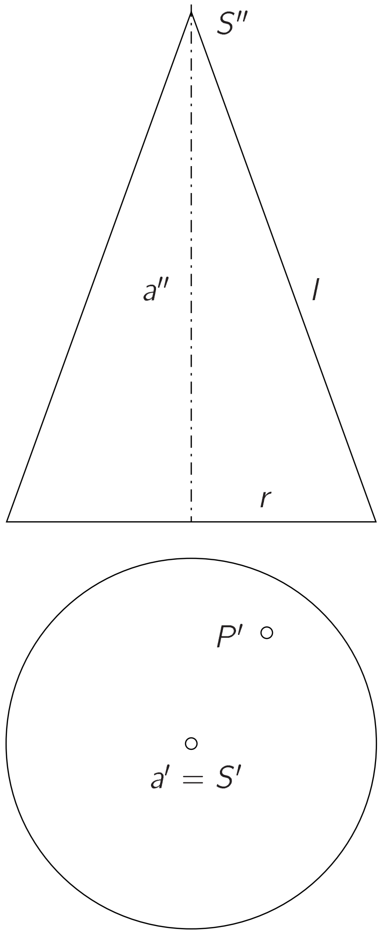
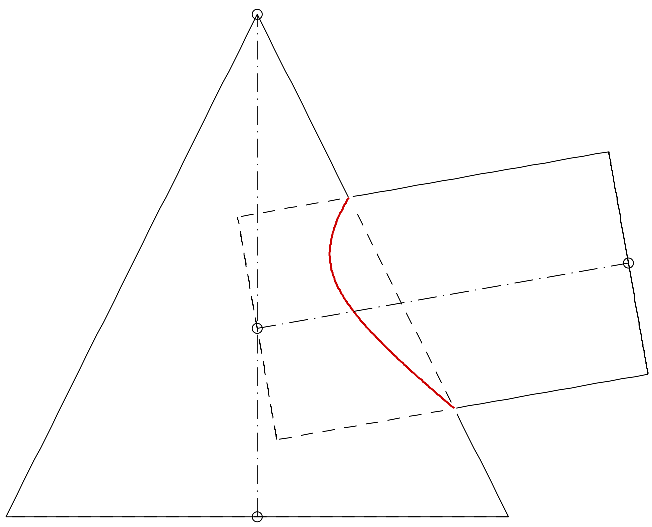


Abbildung 4.16: Abwicklung eines Kegels

Aufgabe 4.5 *Wickle Kegel- und Zylinderteil aus Abb.* **??** *(Durchdringung Kegel–Zylinder) ab, schneide die Abwicklungen aus und bastele ein Modell.*



Interessant sind auch **Auf**wicklungen:

Aufgabe 4.6 *Wickle das Plakat in Abb. 4.17 auf die Reklamesäule (Zylinder) auf.*

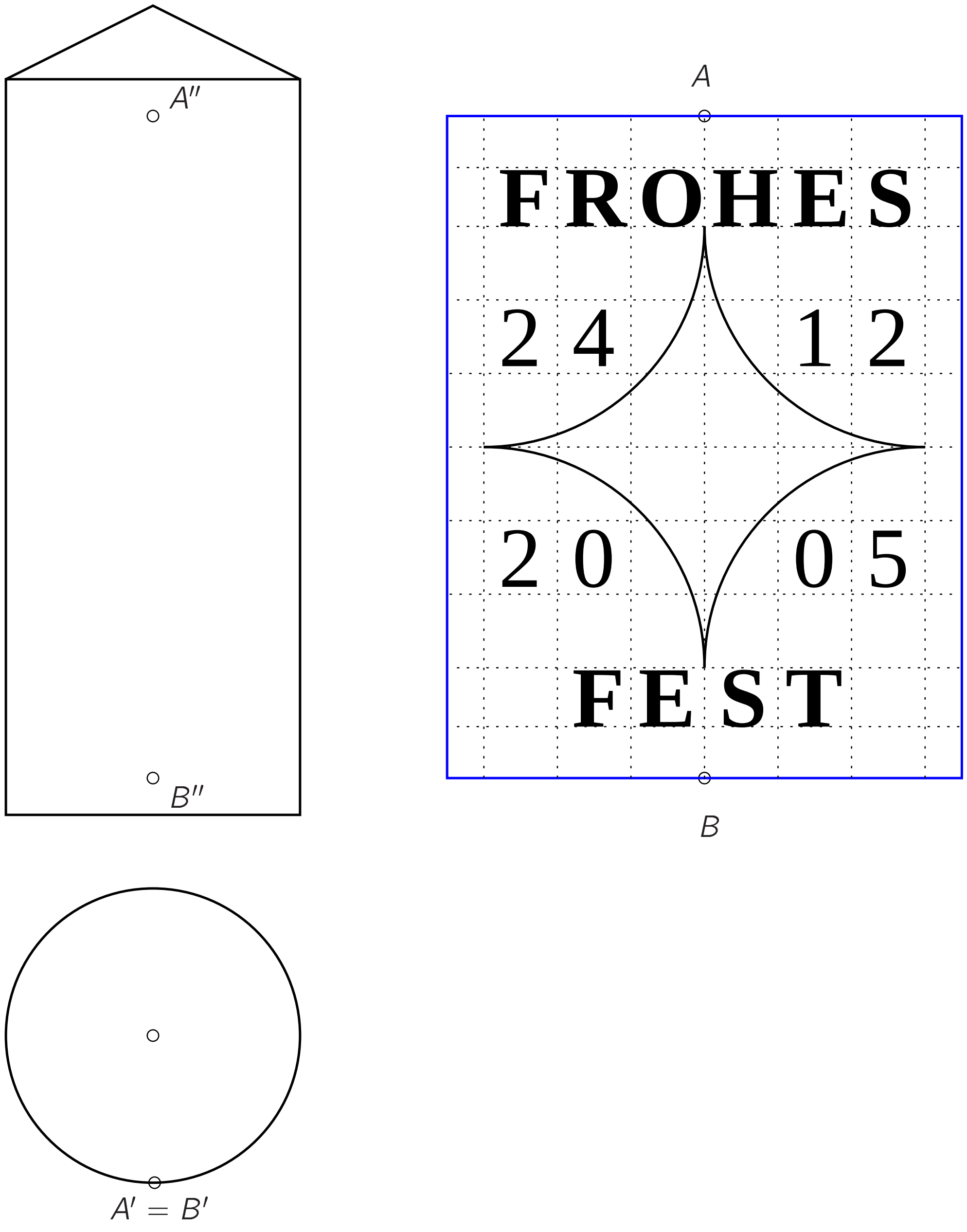


Abbildung 4.17: Aufwicklung auf einen Zylinder

Kapitel 5

Zentralprojektion und Rekonstruktion

5.1 Zentralprojektion

(s. LEO S.213)

in Abschnitt 1.1.2 der Einleitung wurden wesentliche Eigenschaften einer Zentralprojektion erwähnt und auf die wichtigsten Unterschiede zur Parallelprojektion hingewiesen. Zur Erinnerung: Räumliche Gegenstände (Punkte, Strecken, Kurven,...) werden von einem Punkt (*Zentrum oder Augpunkt*) aus auf eine Ebene projiziert (s. Abb. 5.1).

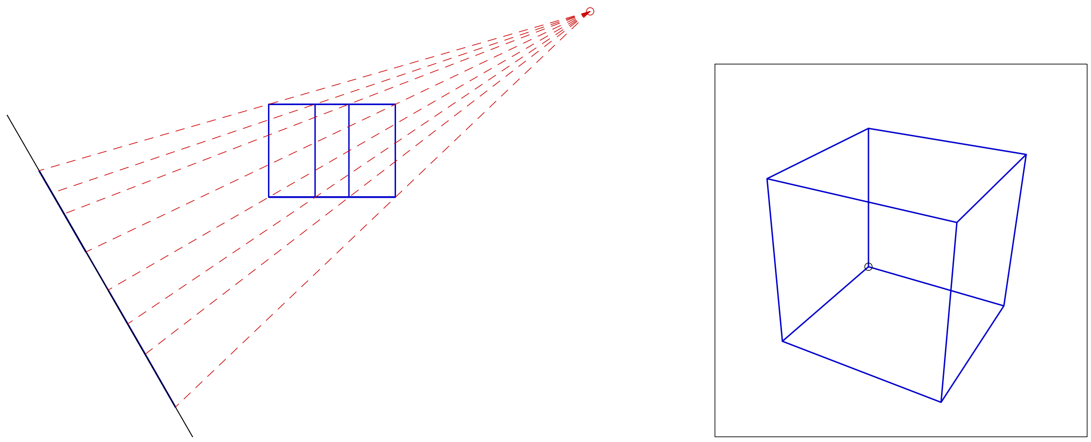


Abbildung 5.1: Quader in Zentralprojektion

Betrachtet man ein so entstandenes Bild mit **ein**em Auge und zwar mit dem Auge im Zentrum, so lässt sich kein Unterschied zum Betrachten des Gegenstandes selbst feststellen. Diese Tatsache ist ein Grund für die große Bedeutung der Zentralprojektion. Auch eine **Photographie** ist eine Zentralprojektion. Eine gute Kenntnis des Prinzips und der Eigenschaften einer Zentralprojektion ist auch für die in der Praxis wichtige Aufgabe der **Rekonstruktion** (s. Abschnitt 5.3) nötig. Dabei versucht man anhand einer Photographie auf die wahren Abmessungen eines Gegenstandes zu schließen.

5.1.1 Definitionen zur Zentralprojektion

Bezeichnungen:

O	:	**Augpunkt**
π	:	**Bildtafel**
H	:	**Hauptpunkt** (Fußpunkt des Lotes vom Augpunkt auf die Bildtafel.
		Bei Original–Photographien ist H der Mittelpunkt des Bildes.
d	:	**Distanz** (Abstand Augpunkt – Hauptpunkt)
π_1	:	**Standebene** (Grundrissebene)
s	:	**Standlinie** Schnittgerade der Standebene mit der Bildtafel)
h	:	**Horizont** (Schnittgerade der horizontalen Ebene durch O mit der Bildtafel.
	:	Bei senkrechter Bildtafel geht h immer durch H.)
π_v	:	**Verschwindungsebene** (Ebene durch O, die parallel zur Bildtafel ist.)

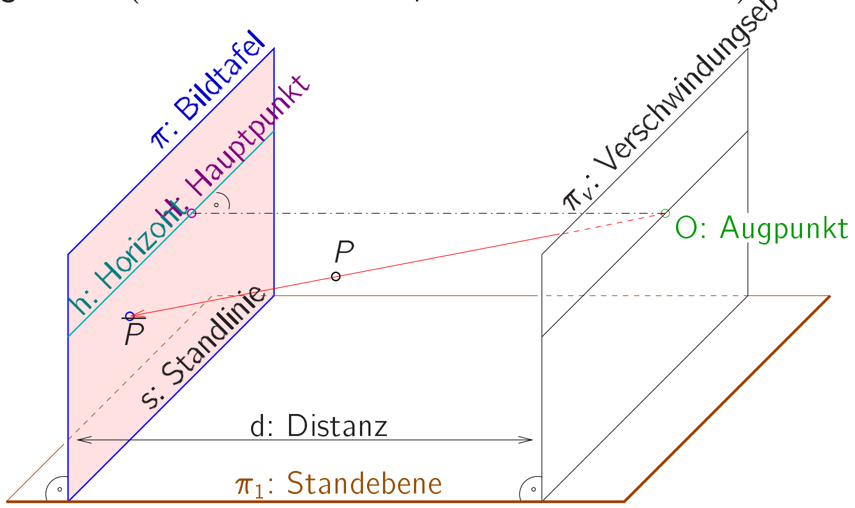


Abbildung 5.2: Definitionen zur Zentralprojektion

Das Bild, das durch Zentralprojektion entsteht, nennt man auch **perspektives Bild**.
Punkte in der Verschwindungsebene haben kein perspektives Bild, da die zugehörigen Projektionsstrahlen die Bildtafel nicht treffen.
Es ist üblich, nur solche Teile von Gegenständen abzubilden, die **vor** der Verschwindungsebene liegen.
Das Auge sieht nur solche Dinge gut, die innerhalb des **Sehkegels** (Kegel mit Spitze in O und Achse O-H, dessen halber Öffnungswinkel $\approx 30°$ ist) liegen.

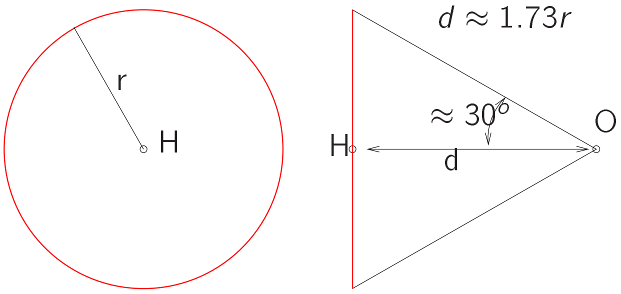


Abbildung 5.3: Sehkreis

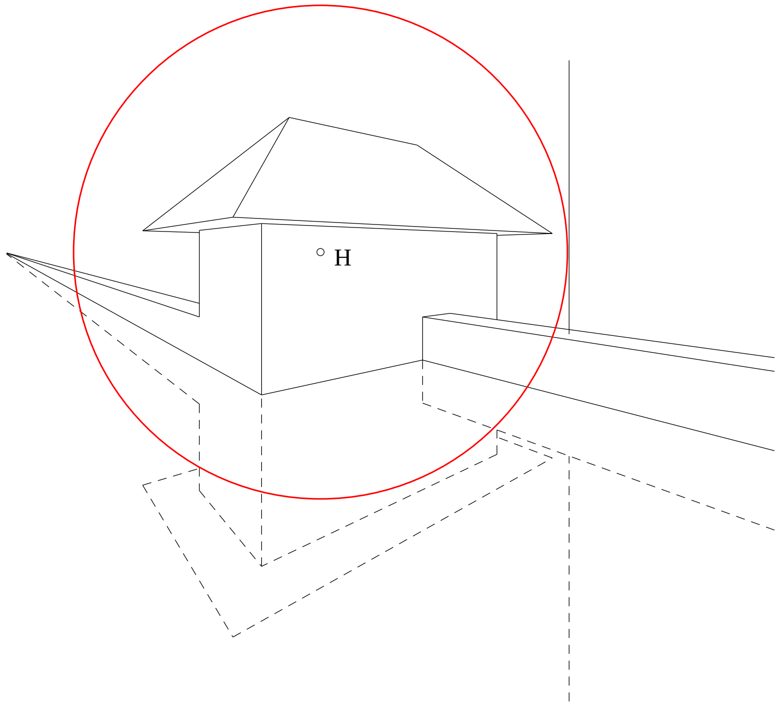


Abbildung 5.4: Zentralprojektion mit Sehkreis: Haus am See

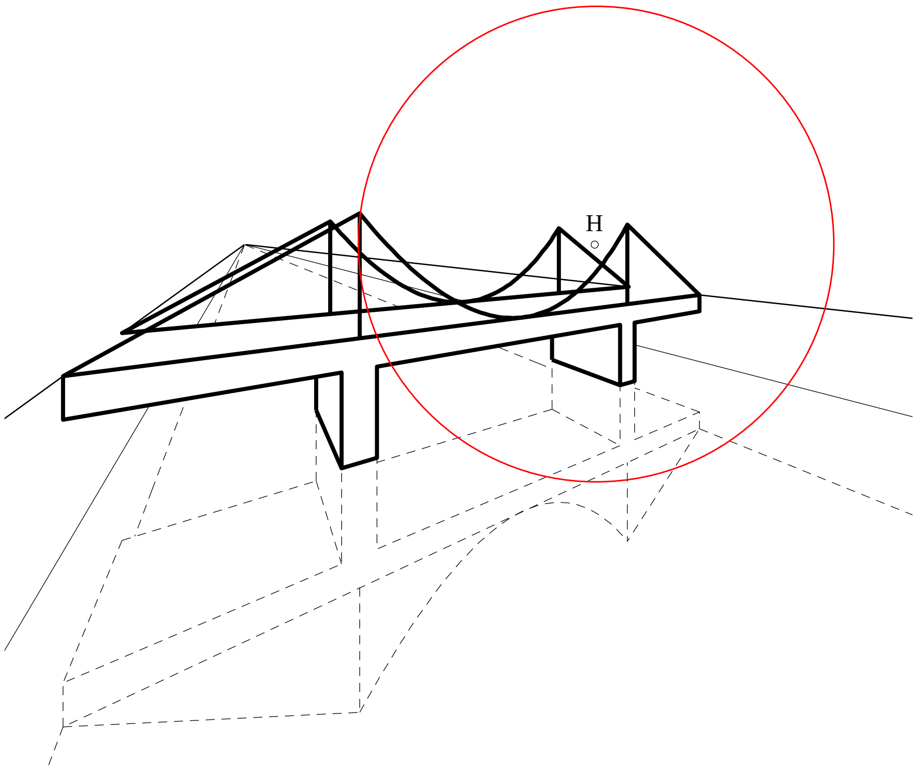


Abbildung 5.5: Zentralprojektion mit Sehkreis: Brücke

5.1.2 Spurpunkt, Fluchtpunkt, Spurgerade, Fluchtgerade

Der Durchstoßpunkt S_g einer Gerade g mit der Bildtafel π heißt **Spurpunkt** von g.
Die Bilder einer Schar **paralleler Geraden** sind i.a. nicht parallel. Sie schneiden sich im **Fluchtpunkt** F **der Geradenschar**. Man erhält F als Spurpunkt derjenigen Gerade g_0 der Schar, die durch den Augpunkt O geht.

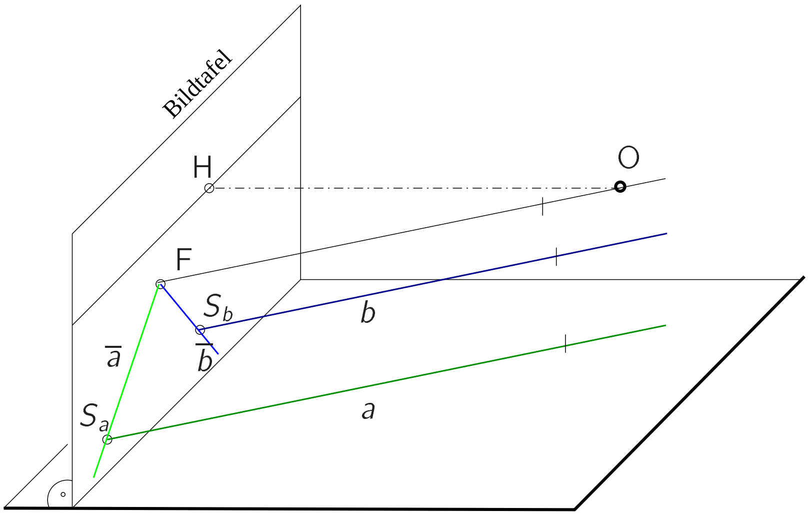


Abbildung 5.6: Flucht– und Spurpunkt paralleler Geraden

Ist g eine Gerade und F der Fluchtpunkt der durch g bestimmten parallelen Geradenschar, so sagt man "F ist der **Fluchtpunkt** der Gerade g". Es gilt:

1. Geraden, die senkrecht zur Bildtafel sind, heißen **Tiefenlinien**.
2. Fluchpunkte **horizontaler Geraden** liegen auf dem Horizont h.
3. Eine Gerade ist durch ihren Spurpunkt und ihren Fluchtpunkt **bestimmt**, falls diese voneinander verschieden sind.
4. Die Bildgeraden zweier paralleler Geraden, die zur Bildtafel parallel sind, sind parallel.

Beispiel 5.1 *Abb. 5.7 zeigt Fluchtpunkte paralleler Geraden.*

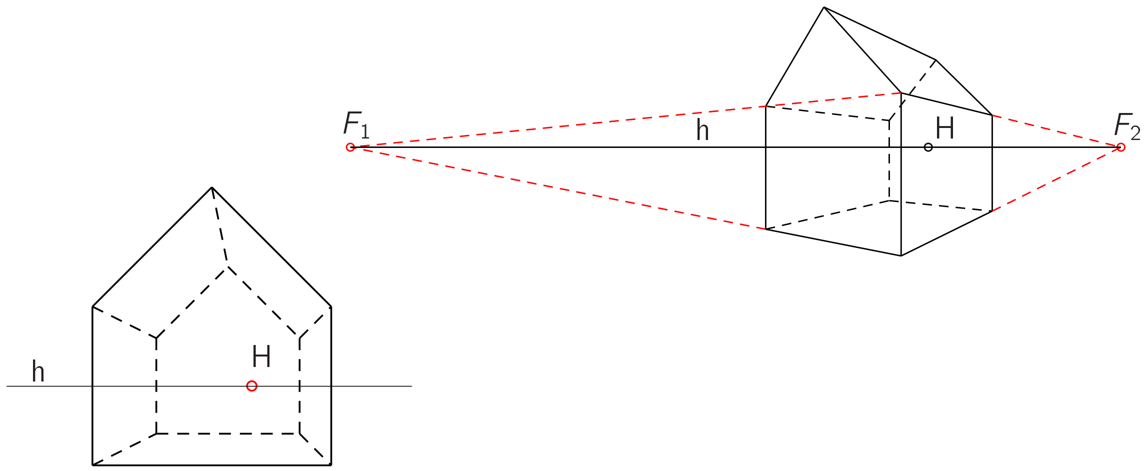


Abbildung 5.7: Fluchtpunkte eines Hauses

Die Schnittgerade einer Ebene ε mit der Bildtafel π heißt **Spurgerade** von ε.
Die Bilder einer Schar **paralleler Ebenen** schneiden sich i.a. in der **Fluchtgerade** (–**linie**) f **der Schar**. Man erhält f als Spurgerade derjenigen Ebene der Schar, die durch O geht (s. Abb. 5.8).

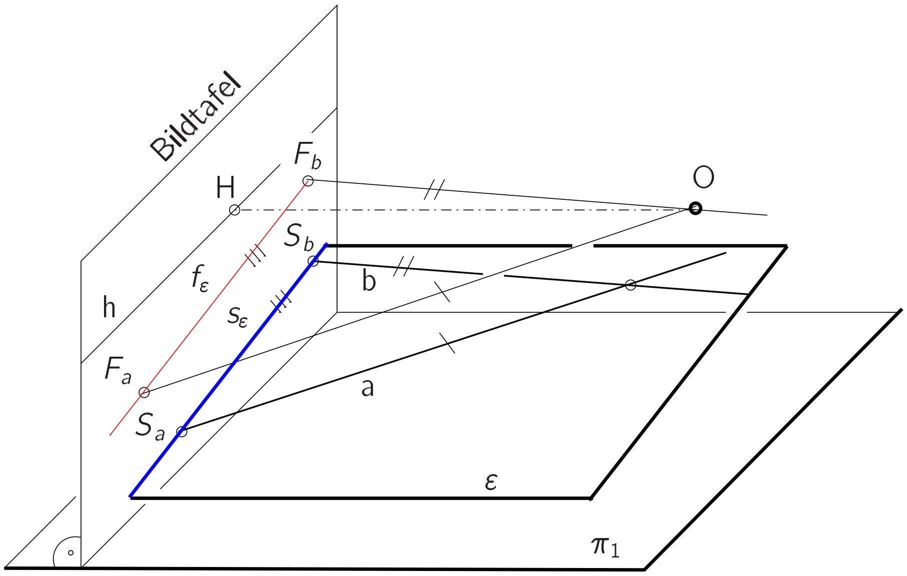


Abbildung 5.8: Flucht– und Spurgeraden einer Ebene

Aufgabe 5.1 *Bestimme die Fluchtgeraden von Ebenen eines Hauses (Abb. 5.9)*

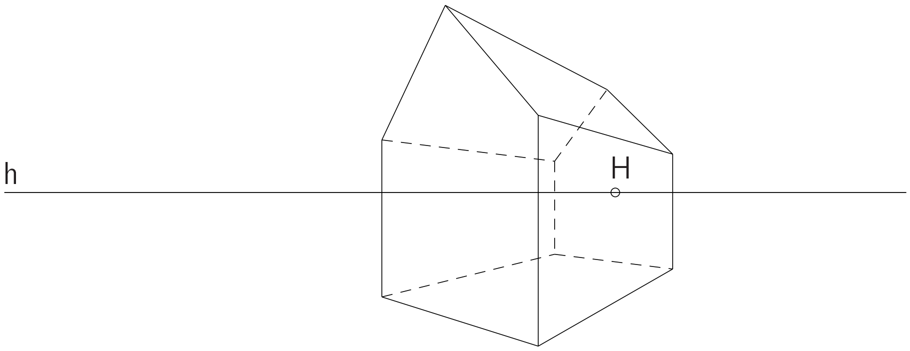


Abbildung 5.9: Fluchtgeraden eines Hauses

5.1.3 Konstruktion perspektiver Bilder bei senkrechter Bildtafel

Steht die Bildtafel **senkrecht**, so gilt:

$\boxed{H \text{ liegt auf dem Horizont } h.}$

Vorgabe	:	a) Punkte und Geraden in Grund– und Aufriss.
		b) Bildtafel π und der Augpunkt O in Grund– und Aufriss.
Gesucht	:	Die perspektiven Bilder der Punkte und Geraden.

Verfahren: (s. LEO S.217)

(0) Bestimmung des **Hauptpunktes** H (Lot von O' auf π') und des **Horizonts** h (Höhenlinie durch O in π) in Grund– und Aufriss. “Festmachen” des Bildes auf der Zeichenfläche durch Wahl des Hauptpunktes H. Zeichnen des Horizonts h durch H.

(1) Abbildung einer **Geraden** g:
Fluchtpunkt F_g und Spurpunkt S_g oder zwei andere Punkte der Bildgeraden $\overline{g}$ in Grund– und Aufriss bestimmen.
Übertragen dieser Punkte in die Zeichenfläche für das perspektive Bild. (Der horizontale Abstand eines Bildpunktes von H wird aus dem Grundriss, der Abstand vom Horizont h aus dem Aufriss entnommen.)
(F_g ist der Spurpunkt der zu g parallelen Gerade durch O.)

(2) Abbildung eines **Punktes** P:

I) **1. Methode** (Durchstoßpunktmethode):
a) zeichnen des Projektionsstrahls p in Grund– und Aufriss.
b) Bestimmung des Schnittpunktes $\overline{P} = p \cap \pi$ (Bildpunkt) in Grund– und Aufriss.
c) zeichnen des Bildpunktes $\overline{P}$ (horizontaler Abstand von H aus Grundriss, Abstand vom Horizont h aus Aufriss).

II) **2. Methode**:
Man bestimmt das Bild $\overline{P}$ als Schnitt zweier “leicht” zu zeichnenden **Hilfsgeraden**. Als Hilfsgeraden kann man z.B.
a) Tiefenlinien (ihre Bilder gehen durch H),
b) Geraden, deren Fluchtpunkte schon bekannt sind, verwenden.

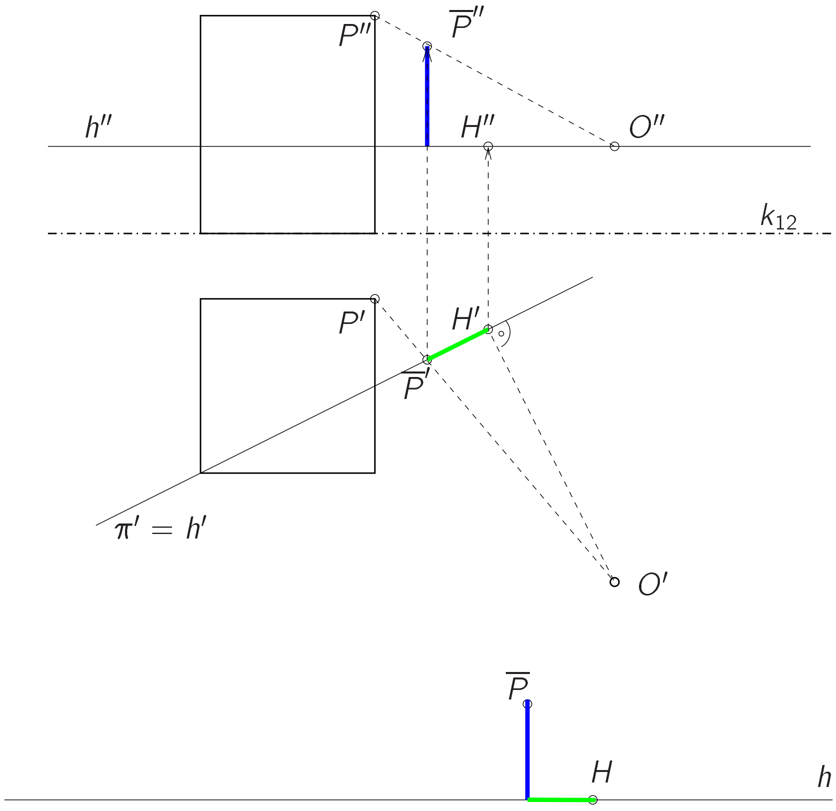


Abbildung 5.10: Zentralprojektion eines Quaders mit der Durchstoßpunktmethode

Um das Übertragen der in Grund– und Aufriss konstruierten Punkte in das perspektive Bild zu erleichtern, wird oft die **Architektenanordnung** gewählt: (s. LEO S.221)

Der **Grundriss** wird so unterhalb (oder oberhalb) von dem perspektiven Bild angeordnet, dass

der Horizont h parallel zu π' und H auf der Gerade $\overline{O'H'}$ liegt.

Das perspektive Bild eines Punktes liegt dann auf dem Lot zu π' ("Ordner") im Grundriss des Bildpunktes.

Der **Aufriss** wird so neben das perspektive Bild gelegt, dass

h'' mit h übereinstimmt.

Die Höhe eines Spurpunktes über dem Horizont h kann dann direkt aus dem Aufriss in das perspektive Bild übertragen werden.

Aufgabe 5.2 *Zeichne ein perspektives Bild eines Quaders in Architektenanordnung (Abb. 5.11).*

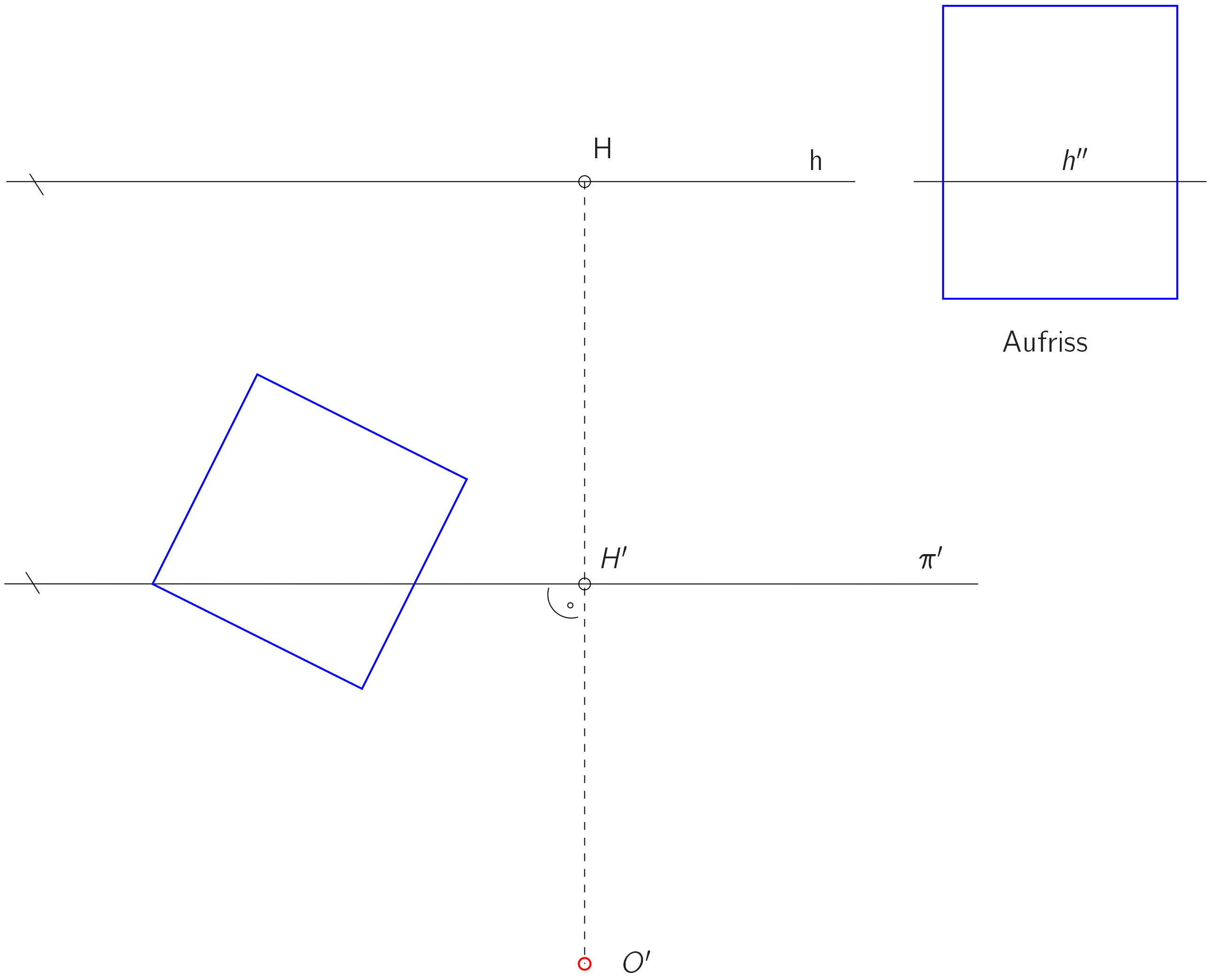


Abbildung 5.11: Zentralprojektion eines Quaders in Architektenanordnung

Aufgabe 5.3 *Zeichne ein perspektives Bild eines Hauses mit Fahnenstange a in Architektenanordnung (Abb. 5.12). (Verwende* Tiefenlinien *zur Konstruktion der Fahnenstange.)*

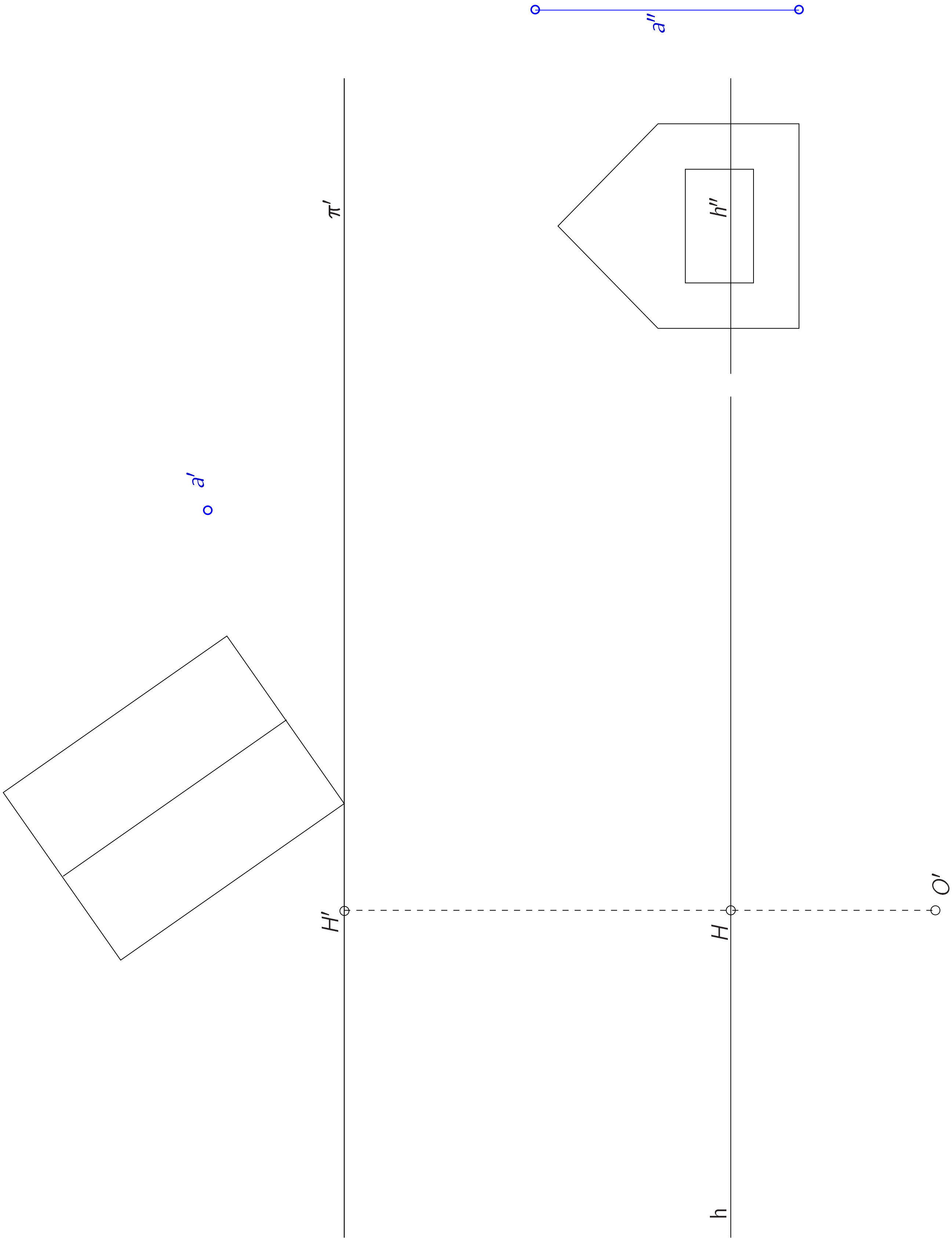


Abbildung 5.12: Zentralprojektion eines Hauses in Architektenanordnung