Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
K. Stavrakidis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
12.07.2007

9. Übungsblatt zur Vorlesung Elementare Partielle Differentialgleichungen

Übung

Aufgabe 1 (Wärmeleitungsgleichung mit unstetigen Randbedingungen)

L ösen Sie folgende Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x,0) &= 0 \quad \text{für } x < 0 \\ u(x,0) &= 1 \quad \text{für } x > 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $u(x,t) = f(\frac{x}{\sqrt{4kt}})$.

Lösung: Für f muss gelten $2f'(y)y - f''(y) = 0$ mit $y := \frac{x}{\sqrt{4kt}}$. Umformen führt zu $\frac{f''(y)}{f'(y)} = \frac{d}{dy} \ln f'(y) = -2y$. Also

$$f(y) = c_1 + c_2 \int_0^y e^{-z^2} \mathrm{d}z.$$

Für $x < 0$ gilt $y \to -\infty$ und für $x > 0$ gilt $y \to \infty$, falls $t \to 0$. Damit u die Randwertbedingungen erfüllt, muss $c_1 = \frac{1}{2}$ und $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ gelten (beachte: $\int_0^\infty e^{-z^2} \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$).

Aufgabe 2 (Wellengleichung I)

Es seien $g \in C^2(\mathbb{R}),\ k \in C^1(\mathbb{R})$ und $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sei gegeben als

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\ [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} k(y) \mathrm{d}y.$$

Dann gilt:

(a) $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$

(b) $u_{tt} - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0$

(c) $u(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}$

(d) $u_t(x,0) = k(x),\ x \in \mathbb{R}$

Lösung: (a)+(b): Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x-t}^{x+t} k(y)\mathrm{d}y \quad = \quad k(x+t) + k(x-t).$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} u_t(x,y) &= \frac{1}{2}(g'(x+t) - g'(x-t)) + \frac{1}{2}(k(x+t) + k(x-t)) \\ u_{tt}(x,y) &= \frac{1}{2}(g''(x+t) + g''(x-t)) + \frac{1}{2}(k'(x+t) - k'(x-t)). \end{aligned}$$

Analog dazu gilt

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \frac{1}{2}(g'(x+t) + g'(x-t)) + \frac{1}{2}(k(x+t) - k(x-t)) \\ u_{xx}(x,y) &= \frac{1}{2}(g''(x+t) + g''(x-t)) + \frac{1}{2}(k'(x+t) - k'(x-t)). \end{aligned}$$

(c)+(d): klar

Aufgabe 3 (Wellengleichung II)

S eien Ω ein beschränktes Gebiet und $T > 0$. Wir definieren mit Ω_T den Raum-Zeit-Zylinder $\Omega_T := \Omega \times (0,T]$. Wir definieren den parabolischen Rand Γ_T als $\Gamma_T := \{(x,t) \in \partial\Omega_T : t < T \text{ oder } x \in \partial\Omega\}$.

Wir betrachten die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega_T \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma_T \\ u_t &= h \quad \text{auf } \Omega \times \{0\}. \end{aligned}$$

Zeige: Es existiert maximal eine Lösung.

Hinweis: Benutze die Energie-Methode aus dem Skript für die Wärmeleitungsgleichung, setze aber

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_\Omega w_t^2(x,t) + |\nabla w(x,t)|^2 \mathrm{d}x.$$

Lösung: Wir nehmen an, dass zwei Lösungen u_1 und u_2 der obigen Wellengleichung existieren. $w := u_1 - u_2$ löst folglich

$$\begin{aligned} w_{tt} - \Delta w &= 0 \quad \text{in } \Omega_T \\ w &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_T \\ w_t &= 0 \quad \text{auf } \Omega \times \{0\}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e(t) &= \int_\Omega w_t w_{tt} + \nabla w \cdot \nabla w_t \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega w_t (w_{tt} - \Delta w) \mathrm{d}x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Der Randterm, der bei der partiellen Integration auftritt, verschwindet, da $w = 0$ und damit auch $w_t = 0$ auf $\partial\Omega \times [0, T]$. Damit gilt für alle $0 \leq t \leq T$ $e(t) = e(0) = 0$ und somit $w_t = \nabla w = 0$ in Ω_T. Wegen $w = 0$ auf $\Omega \times \{0\}$ gilt $w = 0$ in Ω_T.