Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
K. Stavrakidis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
05.07.2007

8. Übungsblatt zur Vorlesung Elementare Partielle Differentialgleichungen

Übung

Aufgabe 1 (Harmonische Funktionen)

Sei Ω ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet und u harmonisch. Ferner gelte $u \geq 0$ auf dem Rand $\partial\Omega$. Zeigen Sie: Entweder gilt $u = 0$ oder $u > 0$ in Ω.

Lösung: Folgt aus dem Maximumprinzip.

Aufgabe 2 (Wärmeleitungsgleichung)

Sei $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - k\Delta u = 0 \tag{1}$$

mit $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $u(\cdot - c, \cdot)$, $c \in \mathbb{R}$, ist wieder eine Lösung von (1).

(b) Jede Ableitung von u bzgl. der ersten Komponente ist wieder eine Lösung von (1).

(c) Jede Linearkombination von Lösungen ist wieder eine Lösung von (1).

(d) $v : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $v(x, y, t) := u(x, t) \cdot u(y, t)$ ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $v_t - k\Delta v = 0$.

Lösung: Klar

Aufgabe 3 (Wärmeleitungsgleichung auf dem Ganzraum)

Sei $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Schwartzfunktion. Lösen Sie folgende Wärmeleitungsgleichung mittels Fouriertransformation

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) &= g \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Lösung: Vgl. 7. Übung, Aufgabe 4. und Skript Kapitel 7.10.