Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
K. Stavrakidis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
28.06.2007

# 7. Übungsblatt zur Vorlesung Elementare Partielle Differentialgleichungen

## Übung

**Aufgabe 1** (Faltung)

Die Faltung $f*g$ definieren wir als $(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$ für alle Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, für die das Integral existiert.

(a) Zeigen Sie: $f * g = g * f$.

(b) Seien $f$ betragsintegrierbar, $g \in C^k(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Zeigen Sie: $D^\alpha(f*g) = f*(D^\alpha g)$ für $|\alpha| \leq k$.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Ableitung mit dem Integral vertauscht. Für Hörer der Analysis IV: Warum?

**Lösung:**

(a) Mit der Substitution $z := x - y$ erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)g(z) \cdot |-1|.$$

(b) Mit dem Majoratenkriterium erhält man die Aussage.

**Aufgabe 2** (Regularität harmonischer Funktionen)

Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$ und $\operatorname{supp} \varphi \subset B(0,1)$ eine radiale Funktion, d. h. es existiert eine Funktion $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(|x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Ferner sei $\varphi_\varepsilon$ gegeben durch $\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$. Außerdem definieren wir $u_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * u$ für eine harmonische Funktion $u$.

Zeigen Sie mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen: $u = u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ für alle $\varepsilon > 0$. Folglich sind harmonische Funktionen beliebig oft differenzierbar.

Hinweis: Die Faltung $\varphi * u$ ist hier zu verstehen als $(\varphi * u)(x) = \int_\Omega \varphi(x-y)u(y)\mathrm{d}y$ für $x \in \Omega$.

**Lösung:** Nach Aufgabe 1 gilt $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Weiterhin ist $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset B(0,\varepsilon)$ und $\int_{B(0,\varepsilon)} \varphi_\varepsilon = 1$.

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &= \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)} \tilde{\varphi}\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)u(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \tilde{\varphi}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\int_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}r \\
&= \frac{na(n)}{\varepsilon^n}u(x)\int_0^\varepsilon \tilde{\varphi}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)r^{n-1}\mathrm{d}r \\
&= u(x)\int_{B(0,r)} \varphi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y \\
&= u(x).
\end{aligned}$$

**Aufgabe 3** (Fouriertransformation)

Bezeichne $L^1(\mathbb{R}^n)$ die betragsintegrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ und $C_0(\mathbb{R}^n) := \{f \in C(\mathbb{R}^n) : \forall \varepsilon > 0 : \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \varepsilon\} \text{ ist kompakt}\}$. Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \widehat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x$$

für $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \xi \in \mathbb{R}^n$. Die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1} : C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ ist gegeben durch

$$(\mathcal{F}^{-1}\widehat{f})(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ (ohne Beweis).

Seien $f, g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

(a) $D^\alpha \mathcal{F} f = (-i^{|\alpha|})\mathcal{F}(x^\alpha f)$

(b) $\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F} f$

(c) $\mathcal{F}(\Delta f) = -|\xi|^2 \widehat{f}$, falls $k \geq 2$

(d) $\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{n/2}\widehat{f} \cdot \widehat{g}$

Hinweis: Beachten Sie, dass auch die Umkehrung von (a) bzw. (b) gilt, d. h. ist $f, x^\alpha f \in L^1(\Omega)$ für alle $|\alpha| \leq k$, so ist $\mathcal{F}f \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Analog (b).

**Lösung:** Auch hier ermöglicht die Majorisierte Konvergenz das Vertauschen der Ableitung mit dem Integral.

(a) Für $1 \leq j \leq n$ gilt:

$$\partial_j(\mathcal{F}f)(\xi) = \partial_j \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = -i\int_{\mathbb{R}^n} f(x)x_j e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = -i\mathcal{F}(x_j f)(\xi).$$

Mittels Induktion folgt die Aussage sofort.

(b) Für $1 \leq j \leq n$ gilt:

$$\mathcal{F}(\partial_j f) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j f(x))e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\partial_j e^{-ix\xi})\mathrm{d}x = i\xi_j\mathcal{F}f.$$

Das Randintegral verschwindet, da $f$ nach Voraussetzung kompakten Träger besitzt.

(c) Dies folgt sofort aus (b).

(d) Substitution $z = x - y$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y e^{-x\xi}\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\int_{\mathbb{R}^n} g(z)e^{-i(z+y)\xi}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-iy\xi}\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}^n} g(z)e^{-iz\xi}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 4** (Laplace-Gleichung auf dem Halbraum)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *schnell fallend*, falls $\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha f(x) = 0$ für alle Multiindizes $\alpha$. Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : D^\alpha f \text{ schnell fallend } \forall\,\alpha\}$ wird *Schwartzraum* und seine Elemente *Schwartzfunktionen* genannt. Sei $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$. Bestimmen Sie die Lösung von

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\
u &= g \quad \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+.
\end{aligned}$$

Hinweis: Wenden Sie die Fouriertranformation auf die ersten $n-1$ Komponenten an. Warum kann man die Fouriertransformation nicht auf die gesamte Gleichung anwenden?

**Lösung:** Hier bezeichnet $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation und $\widehat{f}$ die Fouriertransformation von $f$ bzgl. der ersten $n-1$ Komponenten.

Die Fouriertransformation des Gleichunssystems:

$$\begin{aligned}
-|\xi|^2\widehat{u} + \partial_n^2\widehat{u} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\
\widehat{u} &= \widehat{g} \quad \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+.
\end{aligned}$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung lautet $\widehat{u} = e^{-|\xi|x_n}\widehat{g}$. Folglich ist $u$ gegeben durch $u = \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|x_n}) * g$. Da beide Funktionen in $C_0(\mathbb{R}^n)\cap L^1(\mathbb{R}^n)$ liegen, ist $u$ wohldefiniert. Wegen $g \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ gilt $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.