Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
K. Stavrakidis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
21.06.2007

6. Übungsblatt zur Vorlesung Elementare Partielle Differentialgleichungen

Separationsansatz bedeutet, dass man die Funktion u in der Form $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ bzw. $u(r,\varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ darstellt.

Übung

Aufgabe 1 (RWP)

Lösen Sie für $a, b > 0$ folgendes RWP

$$\begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0 & \text{in } (0,a) \times (0,b) \\ u_x & = & -a & \text{auf } x = 0 \\ u_x & = & 0 & \text{auf } x = a \\ u_y & = & b & \text{auf } y = 0 \\ u_y & = & 0 & \text{auf } y = b \end{array}$$

Hinweis: u ist ein quadratisches Polynom von x und y.

Lösung: Da keine Randbedingung für u sondern nur für die Ableitungen vorgegeben ist, kann u nur bis auf Konstanten eindeutig sein.

Ansatz:

$$u(x,y) = c_1 x^2 - c_2 xy + c_3 y^2 + c_4 x + c_5 y + c_6$$

Einsetzen:

$$\begin{array}{rcll} u_{xx} + u_{yy} & = & 2c_1 + 2c_3 = 0 & \Rightarrow c_1 = -c_3 \\ u_x(0,y) & = & c_2 y + c_4 = -a & \Rightarrow c_2 = 0,\ c_4 = -a \\ u_x(a,y) & = & 2c_1 a + c_2 y + c_4 = 0 & \Rightarrow c_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_y(x,0) & = & c_2 x + c_5 = b & \Rightarrow c_5 = b \\ u_y(x,b) & = & c_2 x + 2c_3 b + c_5 = 0 & \Rightarrow c_3 = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

c_6 ist beliebig wählbar.

Aufgabe 2 (Separationsansatz I)

Lösen Sie folgende Differentialgleichung für $u : (0,1)^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u(x,1) &= x^2 - x \\ u(0,y) &= 0 \\ u(1,y) &= 0 \\ u_y(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

Hinweis: Die Sinus-Fourierreihe von einer Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(n\pi x)$ mit $\alpha_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)$.

Ferner gilt $\int_0^1 (x^2 - x)\sin(n\pi x) = \frac{2}{(n\pi)^3}((-1)^n - 1)$.

Lösung: Wir wenden das Separationsverfahren nicht auf die eigentliche PDE an, sondern auf die PDE ohne die erste Randbedingung $u(x,1) = x^2 - x$. Dadurch erhalten wir unendlich viele Lösungen, die wir aufsummieren. Diese Reihe vergleichen wir mit der Sinus-Fourierreihe und erhalten die Lösung.

Durch den Seperationsansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ erhalten wir zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$X'' = \lambda X, \qquad Y'' = -\lambda Y$$

mit den allgemeinen Lösungen:

$$\begin{aligned} X(x) &= Ae^{\sqrt{\lambda}} + Be^{-\sqrt{\lambda}} \\ Y(y) &= Ce^{\sqrt{-\lambda}} + De^{-\sqrt{-\lambda}} \end{aligned}$$

Die Randbedingungen $u(0,y) = u(1,y) = 0$ ergeben

$$X(0)Y(y) = X(1)Y(y) = 0 \quad \forall y,$$

so dass für jede nichttriviale Lösung $X(0) = X(1) = 0$ gelten muss. Deshalb gilt:

$$A + B = 0\ , \quad Ae^{\sqrt{\lambda}} + Be^{-\sqrt{\lambda}} = 0$$

$$\Rightarrow\ A(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0$$

Für $A = 0$ ist $B = 0$, und wir erhalten nur die triviale Lösung.

Falls $A \neq 0$, muss $e^{2\sqrt{\lambda}} = 1$ sein, d. h. $2\sqrt{\lambda} = 2\pi i n$ bzw. $\lambda = -\pi^2 n^2,\ n = 1, 2, \ldots$

Aus der Randbedingung $u_y(x,0) = 0$ und den gefundenen λ ergibt sich:

$$X(x)Y'(y) = 0,\ \Rightarrow\ Y'(0) = 0$$

für nicht triviale Lösungen.

$$\Rightarrow\ Y'(0) = C\sqrt{-\lambda} - D\sqrt{-\lambda} = 0, \qquad \Rightarrow\ C = D$$

Damit haben wir

$$Y(y) = C(e^{\pi n y} + e^{-\pi n y}) = 2C\cosh(n\pi y),$$

und die allgemeine Lösung der PDE aus dem Ansatz:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)\cosh(n\pi y).$$

Die Koeffizienten A_n sind so zu bestimmen, dass $u(x,1) = x^2 - x$ gilt. Entwickeln $f(x) = x^2 - x$ in eine Sinus-Fourierreihe:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(n\pi y) \text{ mit } \alpha_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)$$

Durch rechnen erhält man $\alpha_n = \frac{4}{(n\pi)^3}((-1)^n - 1)$. Damit ist

$$u(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)\cosh(n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n\pi)^3}((-1)^n - 1)\sin(n\pi x)$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt:

$$A_n = \frac{4((-1)^n - 1)}{(n\pi)^3\cosh(n\pi)}.$$

Aufgabe 3 (Separationsansatz II)

Im Inneren des Einheitskreises $D \subset \mathbb{R}^2$ sei u harmonisch und auf dem Rand ∂D gelte $u(x,y) = 1 + 3y$. Bestimmen Sie die Lösung u durch Übergang zu Polarkoordinaten und Separationsansatz.

Hinweis: Die Darstellung der Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten wurde in der letzten Übung behandelt.

Lösung:

In Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ geht die Aufgabe über in

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0 \qquad \text{in } D$$

$$u(1,\varphi) = 1 + 3\sin\varphi \qquad \text{auf } \partial D$$

Seperationsansatz: $u = u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi) = 0$$

Division durch $R\Phi$, und Multiplikation mit r^2 ergibt:

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

Dadurch erhalten wir zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \Phi'' + \lambda\Phi &= 0 & (1) \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R &= 0 & (2) \end{aligned}$$

Die Lösung der Gleichung (1) lautet:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) &= A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi \qquad \text{falls } \lambda > 0 \\ \Phi(\varphi) &= A + B\varphi \qquad \text{falls } \lambda = 0 \\ \Phi(\varphi) &= Ae^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\varphi} \qquad \text{falls } \lambda = 0 \end{aligned}$$

Aus den Randbedingungen folgt, dass Φ eine 2π-periodische Funktion ist.

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

Damit entfallen die Lösungen für $\lambda < 0$, der Fall $\lambda = 0$ liefert die konstante Lösung $\Phi(\varphi) = A$, und im Fall $\lambda > 0$ muss $\lambda = n^2, n = 1, 2...$ gelten.

Gleichung (2) ist eine Eulersche Diferentialgleichung. Mit $\lambda = n^2$ erhalten wir:

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0$$

Die Lösung ist

$$\begin{aligned} R(r) &= C_n r^n + D_n r^{-n} \qquad \text{für } n = 1, 2, ..., \\ R(r) &= C_0 + D_0 \ln r \qquad \text{für } n = 0. \end{aligned}$$

Diese Funktionen sind harmonisch in D, mit Ausname im Punkt 0. Da die Lösung in $C^2(D)$ liegen soll, müssen alle D_n gleich Null sein. Durch Summation finden wir die allgemeine Lösung:

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)$$

Koeffizientenvergleich liefert $A_0 = 1$ und $B_1 = 3$. Die Lösung lautet also:

$$u(r, \varphi) = 1 + 3r \sin\varphi$$