Aufgabe 3

Es gilt:

$$V_r = u_x \cdot \cos\varphi + u_y \sin\varphi$$

$$V_{rr} = u_{xx} \cdot \cos^2\varphi + 2 u_{xy} \cos\varphi \sin\varphi + u_{yy} \sin^2\varphi$$

$$V_\varphi = -r u_x \sin\varphi + r u_y \cos\varphi$$

$$V_{\varphi\varphi} = r^2 u_{xx} \sin^2\varphi - 2r^2 u_{xy} \sin\varphi\cos\varphi + u_{yy} r^2 \cos^2\varphi$$
$$- r u_x \cos\varphi - u_{yr} \sin\varphi$$

Die Behauptung folgt sofort mit dem Satz von Pythagoras ($\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$).

Aufgabe 4

Für die Drehung gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x\cos\alpha + y\sin\alpha, -x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$

$$= u_x(\tilde{x},\tilde{y}) \cdot \cos\alpha - u_y(\tilde{x},\tilde{y}) \sin\alpha$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(\tilde{x},\tilde{y}) = u_{xx} \cos^2\alpha + u_{yy} \sin^2\alpha$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(\tilde{x},\tilde{y}) = u_{xx} \sin^2\alpha + u_{yy} \cos^2\alpha$$

Daraus folgt die Beh.

Die Verschiebung folgt analog.