Aufgabe 3

(a) Die Gleichung folgt sofort für eine stetige Funktion f mit $g = f'$, wenn man auf $\int_{\mathbb{R}^n} f \varphi'$ die partielle Integration anwendet. Der Randterm verschwindet, da φ einen kompakten Träger besitzt.

(b) Wir betrachten statt des Riemann-Integrals das Lebesgue-Integral. Dann ist die schwache Ableitung bis auf eine Lebesgue-Nullmenge eindeutig.

(c) Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Wert von f in 0 ist beliebig.

(Anmerkung: Es gilt $\int_\Omega f \cdot \varphi = 0$ für alle $\varphi \in C_\infty^c(\Omega)$
$\Rightarrow f = 0$ fast überall)

Annahme: f' ist schwach differenzierbar.

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f' \cdot \varphi' = -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f'' \varphi = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow f'' = 0 \text{ auf } (-\infty, 0)$$

$$\int_\varepsilon^\infty f'' \varphi = \int_\varepsilon^\infty f' \varphi' = \int_\varepsilon^\infty \varphi',$$ da $\varphi \in C_c^\infty((\varepsilon, \infty))$ beliebig war,
gilt $f'' = 0$ auf $(0, \infty)$