Aufgabe 2

Zu jedem glatten Anfangswert u_1 existiert eine Lsg u. Folglich können wir eine Abbildung $T: C(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to C^2(\Omega)$ definieren, die jedem Anfangswert die Lsg zuordnet.

„Stetigkeit der Lsg bzgl. der Anfangsdaten" bedeutet nichts anderes, als dass T stetig ist.

Wie man leicht zeigen kann, ist T linear. (Insbesondere gilt $T0=0$).

Sowohl $C(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ als auch $C^2(\Omega)$ sind mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ausgestattet. Per definitionem gilt $\|u\|_\infty := \sup\limits_{x\in D}|u|$, wobei D der Def.bereich von u ist.

Für die gegebenen Funktionen $u_1^{(n)}$ mit $u_1^{(n)}(x) = e^{-\sqrt{n}}\cos(nx)$ und $u^{(n)}$ mit $u^{(n)}(x,y) = e^{-\sqrt{n}}\frac{1}{n}\cos(nx)\sinh(ny)$ gilt $\|u_1^{(n)}\|_\infty \to 0$ für $n\to\infty$ aber $\|u^{(n)}\|_\infty \to \infty$ für $n\to\infty$. Also ist T nicht stetig.