Aufgabe 5

Der Gradient von h steht immer senkrecht auf den Höhenlinien, denn

$$\left\langle \begin{pmatrix} \partial_{\gamma_1} h(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\ \partial_{\gamma_2} h(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \right\rangle = \partial_{\gamma_1} h(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \cdot \gamma_1'(t) + \partial_{\gamma_2} h(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)$$

$$= \partial_t (h(\gamma_1(t), \gamma_2(t)))$$

$$= 0$$

Falls die Höhenlinien sich nicht schneiden (und auch nicht berühren), ~~~~ so lässt sich ein Punkt auf der Landkarte durch $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ darstellen, wobei der Weg (γ_1, γ_2) implizit gegeben ist durch $h(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = c$ für alle t.
Folglich schneiden die Höhenlinien sich, wenn die Voraussetzungen für den Satz über implizite Funktionen verletzt sind.

Aufgabe 6

a) Siehe beliebiges Analysisbuch („Satz über implizite Funktionen")

Punkt $(2,0)$:

Nein, da $\partial_y (x,y) = 2y = 0$ ist.

Punkt $(0,1)$

Ja, da alle Voraussetzungen erfüllt sind.

b) Siehe Satz über implizite Funktionen.