Aufgabe 4

a) $u(x) = |x|^{-n+2} = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}+1}$

$\Rightarrow \partial_i u = 2x_i\left(-\frac{n}{2}+1\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}}$

$\Rightarrow \partial_{ii} u = 4x_i^2\left(\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}-1}$
$+ (-n+2)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}}$

$\Rightarrow \Delta u = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 (n^2-2n)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}-1}$
$-(n^2-2n)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}}$
$= (n^2-2n)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}}$
$-(n^2-2n)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}}$

$= 0$

b) $u(x) = \left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

$\partial_i u(x) = -x_i\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{-\frac{3}{2}} e^{\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{-1} x_i e^{\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

$\partial_{ii} u(x) = -\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{-\frac{3}{2}} e^{\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}} + 3x_i^2\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{-\frac{5}{2}} e^{\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}$
$-\sqrt{\lambda}\, x_i^2\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{-2} e^{\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{-1} e^{\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}$
$-2x_i^2\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{-2} e^{\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \lambda x_i^2\left(\sum_{j=1}^{3}\right)^{-\frac{3}{2}} e^{\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

$\Delta u(x) = -3\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{-\frac{3}{2}} e^{\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}} + 3\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{-\frac{3}{2}} e^{\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}$
$-\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{-1} e^{\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}} + 3\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{-1} e^{\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}$
$-2\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{-1} e^{\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \lambda\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\sqrt{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

$= \lambda u(x)$