Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
K. Stavrakidis

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007
19.07.2007

10. Übungsblatt zur Vorlesung Elementare Partielle Differentialgleichungen

Auch wenn diese Übung der Vorbereitung auf die Klausur dienen soll, so müssen die Themen, die diese Übung behandelt, und die Themen der Klausur nicht übereinstimmen.

Übung

Aufgabe 1

L ösen Sie die Gleichung $xu_x+tu_t = \frac{t}{x}$ mit dem Anfangswert $u(x,1) = x$ für $x \in \mathbb{R}, t \in (1,\infty)$.

Lösung: vgl. Übung 3, Aufgabe 3c.

Aufgabe 2

L ösen Sie die Gleichung $au_x^2 + au_y^2 = b$ mit der Bedingung $u(x,x) = c$.

Lösung: vgl. Übung 4 , Aufgabe 3.

Aufgabe 3

D ie charakteristische Funktion χ_A auf einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$ und zeichnen Sie die Funktion.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{supp}(\chi_{(0,1)\cup(2,3)\cup(3,4]})$.

Lösung: (a) Es gilt:

$$\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]} = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \text{ oder } x > 2 \\ x, & \text{falls } 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & \text{falls } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

(b) $\operatorname{supp}(\chi_{(0,1)\cup(2,3)\cup(3,4]}) = [0,1] \cup [2,4]$

Aufgabe 4

(a) Sind die Funktionen $f_1, f_2, f_3 : [0,1]^3 \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x,y,z) := x-y$, $f_2(x,y,z) := x+y+z$ und $f_3(x,y,z) := x^2-y^2+z(x-y)$ abhängig? Falls ja, geben Sie eine Funktion F an, die die Abhängigkeit darstellt.

(b) Die Funktionen $f_1, f_2, f_3 : [-1,0]^3 \to \mathbb{R}$ seien gegeben. Untersuchen Sie die Funktionen auf Abhängigkeit.

Lösung: (a) Abhängig. $F(x,y,z) = xy - z$.

(b) Abhängig, vgl. Skript Seite 13, Thm. 6.6.

Aufgabe 5

(a) Berechnen Sie die Ableitung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{xg(x^2)}$, wobei $g \in C^1(\mathbb{R})$.

(b) Sei $u : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ gegeben. Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial t} u(x+t, t^2)$.

Lösung: (a) Mit Ketten- und Produktregel erhält man:

$$f'(x) = e^{xg(x^2)}(g(x^2) + 2x^2 g'(x^2)).$$

(b) Kettenregel liefert:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x+t, t^2) = u'(x+t, t^2) \cdot (1, 2t)^T = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 \\ \partial_1 u_2 & \partial_2 u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} = \partial_1 u + 2t\partial_2 u.$$

Aufgabe 6

B etrachten Sie die Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ auf dem Ganzraum, wobei f betragsintegrierbar ist. Hängt die Lösung u stetig von f ab? Ist die Gleichung wohlgestellt im Sinne von Hadamard? Falls nicht, beweisen Sie Ihre Vermutung.

Lösung: Für jedes f ist $\Phi * f$ eine Lösung der Poisson-Gleichung. Eine weiter Lösung ist $\Phi * f + c_1 x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Damit ist die PDE nicht wohlgestellt.

Da die Lösung nicht eindeutig ist, hängen die Lösungen i. A. nicht stetig von den Anfangsdaten ab:

Betrachten wir $Tf := \Phi * f$. Dann ist T linear und für eine Nullfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} Tf_n = T(\lim_{n\to\infty} f_n) = 0.$$

Limes und T kommutieren auf Grund des Majorantenkriteriums. Diese Abbildung ist zwar stetig, aber wir können auch damit eine unstetige definieren:

Für $f \neq 0$ definieren wir $T_2 f := Tf = \Phi * f$. Für $f = 0$ setzen wir aber $T_2 0 := 1$. Damit ist T_2 in 0 nicht stetig, denn sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder eine Nullfolge:

$$\lim_{n\to\infty} T_2 f_n = \lim_{n\to\infty} Tf_n = 0 \neq 1.$$

Viel Erfolg bei der Klausur!