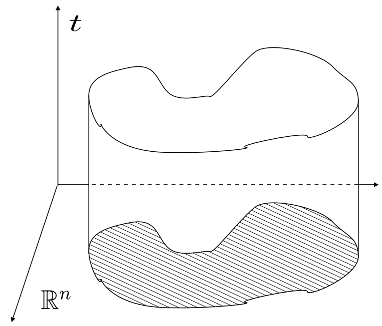


Abbildung 1: Parabolischer Zylinder und parabolischer Rand

**Definition 0.1 (Parabolischer Zylinder)**
*Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $T > 0$. Die Menge $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$ nennen wir* parabolischen Zylinder *und $\Gamma_T := \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T$ den parabolischen Rand.*

Der pararobilsche Zylinder besteht aus dem Inneren des Zylinders (siehe Abbildung 1) und dem oberen "Deckel". Der parabolische Rand besteht dementsprechend aus dem seitlichen Rand des Zylinders einschließlich des Bodens. Der "Deckel"fehlt jedoch.

**Definition 0.2 (Heat ball)**
*Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $r > 0$ definieren wir den* heat ball *als*

$$E(x, t; r) := \{(y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \leq t, \Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n}\}.$$

**Satz 0.3 (Mittelwertformel für die Wärmeleitungsgleichung)**
*Sei $u \in C_1^2(\Omega_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Dann gilt*

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \iint\limits_{E(x,t;r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy\, ds$$

*für alle $E(x, t; r) \subset \Omega_T$.*

**Beweis.** Durch Verschieben der Koordinaten können wir o. B. d. A. annehmen, dass $x = 0$, $t = 0$ gilt. Außerdem sei $u$ glatt. Zur Vereinfachung schreiben wir $E(r) := E(0, 0, r)$. Wir definieren

$$\phi(r) := \frac{1}{r^n} \iint\limits_{E(r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dyds \tag{0.1}$$

$$= \iint\limits_{E(1)} u(ry, r^2 s) \frac{|y|^2}{s^2} dyds. \tag{0.2}$$

Für die Ableitung gilt

$$\phi'(r) = \iint\limits_{E(1)} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s} + 2r u_s \frac{|y|^2}{s} dyds \tag{0.3}$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} \sum_{i=1}^{n} \frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s \frac{|y|^2}{s} dyds \tag{0.4}$$

$$=: I + II \tag{0.5}$$

Wir definieren $\psi(y, s) := \log(\Phi(y, -s) - r^n) = -\frac{n}{2} \log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n \log r$. Es gilt $\psi = 0$ auf $\partial E(r)$, da $\Phi(y, -s) = r^n$ für $(y, -s) \in \partial E(r)$.

Wir wenden nun zweimal partielle Integration auf $II$ an, einmal bzgl. $y_i$ und einmal bzgl. $s$. Die Randterme fallen weg, da $\psi$ auf dem Rand verschwindet.

$$\begin{aligned}
II &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} 4u_s \int_{i=1}^{n} y_i \psi_{y_i} dyds \\
&= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} 4nu_s\psi + 4\sum_{i=1}^{n} u_{sy_i} y_i \psi dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} -4nu_s\psi + 4\sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \psi_s dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} -4nu_s\psi - \frac{2n}{s}\sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i dyds - I.
\end{aligned}$$

Da $u$ die Wärmeleitungsgleichung löst, gilt $u_t = \Delta u$ und damit

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= I + II \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} -4\Delta u\psi - \frac{2n}{s}\sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i dyds \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} \iint\limits_{E(r)} 4u_{y_i}\psi_{y_i} - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i dyds.
\end{aligned}$$

Die Definition von $\psi$ liefert nun, dass $\phi$ konstant ist, d. h. $\phi' = 0$. Folglich gilt

$$\phi(r) = \lim_{t\to 0}\phi(t) = u(0,0)\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^n}\iint\limits_{E(t)} \frac{|y|^2}{s^2}dyds = u(0,0)\iint\limits_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2}dyds = 4u(0,0).$$

■

Mit Hilfe der Mittelwertformel können wir, analog zur Laplace-Gleichung, das starke Maximumprinzip formulieren:

**Satz 0.4 (Starkes Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung)**
*Sei $u \in C_1^2(\Omega_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung.*

1. *Dann gilt*
$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

2. *Ist $\Omega$ einfach zusammenhängend und existiert zusätzlich $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ mit*
$$u(x_0, t_0) = \max_{\overline{\Omega}_T} u,$$
*dann ist $u$ konstant in $\overline{\Omega}_{t_0}$.*

Wie beim starken Maximumprinzip für die Laplace-Gleichung kann hier min durch max ersetzt werden.

**Beweis.** Wir nehmen an, dass $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ existiert mit $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{\Omega}_T} u =: M$. Ist $r > 0$ klein genug, gilt $E(x_0, t_0; r) \subset \Omega_T$. Wenden wir die Mittelwertformel an, erhalten wir

$$M = u(x_0, t_0) = \frac{1}{4r^n}\iint\limits_{E(x_0,t_0,r)} u(y,s)\frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}dyds \le M, \tag{0.6}$$

die Identität

$$\frac{1}{4r^n}\iint\limits_{E(x_0,t_0,r)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}dyds = 1$$

haben wir bereits im Beweis für die Mittelwertformel benutzt. Die Gleichung (0.6) kann nur stimmen, wenn $u = M$ in $E(x_0, t_0; r)$ ist.

Wir verbinden nun $(x_0.t_0)$ mit irgendeinem anderen Punkt $(x_1, t_1) \in \Omega_T$, $t_1 < t_0$, mit einer Geraden $L$. Wir definieren

$$t_2 := \min\{s \geq t_1 : u(x,t) = M \forall\, (x,t) \in L, s \leq t \leq t_0\}. \tag{0.7}$$

Da $u$ stetig ist, wird das Minimum angenommen. Wir nehmen an, dass $t_3 \geq t_1$ gilt. Dann existiert $(x_4, t_4) \in L \cap \Omega_T$ mit $u(x_4, t_4) = M$ und damit auch $u = M$ in $E(x_4, t_4, r)$ für kleines $r > 0$. Da $L \cap \{t_2 - \sigma \leq t \leq t_2\} \subset E(x_4, t_4; r)$ erhalten wir einen Widerspruch zu (0.7). Damit gilt $t_3 = t_1$.

Nun können wir $(x_0, t_0)$ mittels eines Polygonenzuges mit jedem Punkt aus $\Omega_{t_0}$ verbinden und erhalten die Behauptung. ■

Wie wir schon bei der Laplace-Gleichung gesehen haben, erhalten wir sofort einen Existenusatz:

**Satz 0.5 (Eindeutigkeit auf beschränkten Gebieten)**
*Seien $f \in C(\Omega_T)$ und $g \in C(\Gamma_T)$. Dann existiert maximal eine Lösung $u \in C_1^2(\Omega_T)$ der Gleichung*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega_T \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma_T. \end{aligned}$$

**Beweis.** Seien $u_1$ und $u_2$ Lösungen der obigen Gleichung. Setze $w := u_1 - u_2$. Dann löst $w$ die Wärmeleitungsgleichung mit Nullrandbedingungen. Nach dem Maximumprinzip folgt $w = 0$ in $\Omega_T$. Folglich gilt $u_1 = u_2$. ■

**Satz 0.6 (Maximumprinzip für das Cauchy-Problem)**
*Löse $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T])$ die Gleichung*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

*und genüge der Abschätzung mit Konstanten $a, A$*

$$u(x,t) \leq A e^{a|x|^2}$$

*für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$. Dann gilt*

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

**Beweis.** Wir nehmen an, dass $4aT < 1$ gilt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$4a(T + \varepsilon) < 1. \tag{0.8}$$

Für $y \in \mathbb{R}^n$ und $\mu > 0$ sei

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)^2}}.$$

$v$ löst die Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, T]$.

Für $r > 0$ sei $\Omega := B(y, r)$. Das Maximumprinzip liefert

$$\max_{\Omega_t} v) \max_{\Gamma_t} v.$$

Es gilt $v(x, 0) \leq u(x, 0) = g(x)$. Wähle $r = |x - y|$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq t \leq T$. Wegen (0.8) existiert $c > 0$ mit $\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = a + c$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} v(x,t) &= u(x,t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \\ &\leq A e^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \\ &\leq A e^{a(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}} \\ &\leq A e^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a+c))^{n/2} e^{(a+c)r^2} \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^n} g. \end{aligned}$$

Damit gilt $v(y,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$ für $y \in \mathbb{R}^n$ und $0 \leq t \leq T$. Mit $\mu \to 0$ folgt die Behauptung.

Gilt $4aT < 1$ nicht, so wenden wir obige Schlussfolgerungen auf die Intervalle $[0, T_1]$, $[T_1, 2T_1]$, $\ldots$ an, $T_1 = \frac{1}{8a}$. ■

**Satz 0.7 (Eindeutigkeit für das Cauchy-Problem)**
*Seien $f \in C(\mathbb{R}^n \times (0,T]$ und $g \in C(\mathbb{R}^n \times (0,T])$. Dann existiert maximal eine Lösung $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T])$ der Gleichung*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}, \end{aligned}$$

*die der Abschätzung mit Konstanten $a, A$*

$$u(x,t) \leq Ae^{a|x|^2}$$

*für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$ genügt.*

**Beweis.** Sind $u_1$ und $u_2$ Lösungen der obigen Gleichung, setze $w := u_1 - u_2$. Wenden wir das Maximumprinzip für das Cauchy-Problem auf $w$ und $-w$ an, erhalten wir $u_1 = u_2$. ■